

I ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



SERIES

OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL

1 (287)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2013 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2013 г.
JANUARY – FEBRUARY 2013**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Бас редактор
ҚР ҰҒА академигі
Б. Т. Жұмағұлов

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Калменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Главный редактор
академик НАН РК
Б. Т. Жумагулов

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темирбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief
academician of the NAS of the RK
B. T. Zhumagulov

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 3000 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18 www:akademianauk.kz
Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 533.93

К. Н. ДЖУМАГУЛОВА, Е. О. ШАЛЕНОВ, Г. Л. ГАБДУЛЛИНА

(НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Аннотация

Представлена динамическая модель взаимодействия заряженных частиц неидеальной квазиклассической плазмы. Эта модель учитывает квантовомеханический эффект дифракции и эффект динамической экранировки. На основе динамического потенциала взаимодействия заряженных частиц исследованы сечения рассеяния электронов. Сделаны выводы.

Ключевые слова: динамический потенциал взаимодействия, динамическая экранировка, квазиклассическая плазма, сечения рассеяния.

Кілт сөздер: әрекеттесудің динамикалық әлеуеті, динамикалық экрандалу, квазиклассикалық плазма, шашырау қималары.

Keywords: dynamic interaction potential, dynamic screening, quasiclassical plasma cross section.

I. Введение. Разработка моделей взаимодействия структурных элементов неидеальной плазмы и исследование на их основе кинетических, транспортных свойств системы представляют большой фундаментальный интерес и важно для развития технологий многих практических приложений, связанных с неидеальной плазмой. Среди наиболее важных приложений отметим термоядерный синтез путем лазерного обжатия вещества, МГД-генераторы и другие. А так как одна из основных проблем при использовании плазмы – это проблема ее удержания и контроля, то знание транспортных коэффициентов, таких как коэффициенты диффузии, теплоемкости, электропроводности, вязкости имеют первостепенное значение при проектировании технологических установок.

Исторически первой псевдопотенциальной моделью, описывающей эффекты экранировки в неидеальной плазме, явилась модель Дебая-Хюккеля:

$$\Phi_D(r) = \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad (1)$$

где r – межчастичное расстояние, $r_D = \left(k_B T / \left(4\pi e^2 \sum_j n_j Z_j^2\right)\right)^{1/2}$ – радиус Дебая, $Z_\alpha e$, $Z_\beta e$ – электрические заряды частиц сорта α и β .

В работе [1] было показано, что потенциал Дебая-Хюккеля соответствует приближению парных корреляций и поэтому справедлив только при невысоких плотностях. Известно, что в неидеальной квазиклассической плазме, помимо корреляционных, имеют место квантовомеханические эффекты дифракции и симметрии. Для учета вышеназванных квантовомеханических эффектов был разработан специальный метод, заключающийся в сопоставлении классического бальцмановского фактора и квантовомеханической слэттеровской суммы. Впервые данный подход

был изложен в работе [2]. Псевдопотенциал Дойча [3, 4], учитывающий эффект дифракции, имеет следующий вид:

$$\varphi_{\alpha\beta}(r) = \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{\lambda_{\alpha\beta}}} \right). \quad (2)$$

Здесь $\lambda_{\alpha\beta} = \hbar / \sqrt{2\pi m_{\alpha\beta} k_B T}$ – тепловая длина волны Де-Бройля; $m_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ – приведенная масса частиц сорта α и β .

В работе [5] был предложен эффективный потенциал, учитывающий как эффект экранировки, так и квантовомеханический эффект дифракции:

$$\Phi_{\alpha\beta}(r) = \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{\sqrt{1 - 4\lambda_{\alpha\beta}^2 / r_D^2}} \left(\frac{e^{-Br}}{r} - \frac{e^{-Ar}}{r} \right), \quad (3)$$

где $A^2 = \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{\alpha\beta}^2 / r_D^2} \right)$; $B^2 = \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{\alpha\beta}^2 / r_D^2} \right)$.

Этот потенциал экранирован и имеет конечное значение на расстояниях, близких к нулю.

В последнее время ведутся большие работы по построению динамических моделей взаимодействия частиц плазмы, которые в отличие от статических, учитывают относительные скорости взаимодействующих частиц. Сечения столкновений напрямую зависят от значения относительной скорости сталкивающихся частиц, в этой связи более последовательным является применение динамического потенциала взаимодействия частиц при исследовании их столкновений. В первой части представлен динамический потенциал взаимодействия заряженных частиц квазиклассической плазмы. Во второй части исследуются сечения рассеяния электронов на основе полученного динамического потенциала взаимодействия.

II. Параметры системы и динамический потенциал взаимодействия частиц квазиклассической плазмы. Для удобства описания свойств неидеальной плазмы удобно пользоваться параметрами, характеризующими ее состояние при определенных плотностях и температурах. Одним из параметров, характеризующих состояние системы, является параметр связи:

$$\Gamma = \frac{(Ze)^2}{a k_B T}. \quad (4)$$

Здесь среднее расстояние между частицами:

$$a = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}, \quad (5)$$

$n = n_e + n_i$ – концентрация электронов и ионов; T – температура плазмы; k_B – постоянная Больцмана. Параметр плотности определяется как:

$$r_s = \frac{a}{a_B}, \quad (6)$$

где $a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ – радиус Бора. Параметр плотности уменьшается с увеличением плотности.

Параметр вырождения для электронной компоненты:

$$\Theta = \frac{k_B T}{E_F} = 2 \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{\frac{2}{3}} Z^{\frac{5}{3}} \frac{r_s}{\Gamma}, \quad (7)$$

где E_F – энергия Ферми электронов.

Следует отметить, что традиционно экранировка поля заряда в плазме представляется статической экранировкой Дебая–Хюккеля, это приближение справедливо, если скорости сталкивающихся частиц порядка тепловой скорости. Если же скорости превышают тепловую, то такие быстрые частицы при движении не успевают поляризовать окружающую плазму и экранировка их зарядов ослабевает. Экранировка, зависящая от скоростей взаимодействующих частиц, получила название динамической экранировки и в настоящее время часто используется при исследовании свойств неидеальной плазмы. В работе [2] был предложен способ учета динамической экранировки, он сводится к замене статического радиуса Дебая на некоторый эффективный, учитывающий динамическую экранировку:

$$r_0 = r_D \left(1 + \frac{g^2}{g_T^2} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где v – относительная скорость сталкивающихся частиц; v_{Th} – тепловая скорость частиц системы. Тогда псевдопотенциал (3) с учетом динамической экранировки в безразмерном виде переписывается как:

$$\Phi_{\alpha\beta}(R)/k_B T = \frac{\Gamma}{\sqrt{1 - 24\Gamma^2 / (\pi r_s (1 + \delta^2))}} \left(\frac{e^{-BR}}{R} - \frac{e^{-AR}}{R} \right), \quad (9)$$

где

$$A^2 = \frac{\pi r_s}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 - 24\Gamma^2 / (\pi r_s (1 + \delta^2))} \right);$$

$$B^2 = \frac{\pi r_s}{4\Gamma} \left(1 - \sqrt{1 - 24\Gamma^2 / (\pi r_s (1 + \delta^2))} \right);$$

$\delta = v / v_{Th}$ – параметр относительной скорости сталкивающихся частиц. $R = r/a$ – межчастичное расстояние в единицах среднего расстояния между частицами.

На рисунках 1 и 2 представлены парные потенциалы взаимодействия между электроном и другой заряженной частицей: потенциалы Кулона, Дойча, Дебая–Хюккеля, потенциал (3), учитывающий статическую экранировку и (9), учитывающий динамическую экранировку. Как видно из этих рисунков, потенциал (9) при малых скоростях сталкивающихся частиц стремится к потенциалу (3), а при больших скоростях стремится к потенциалу Дойча, не учитывающему экранировку.

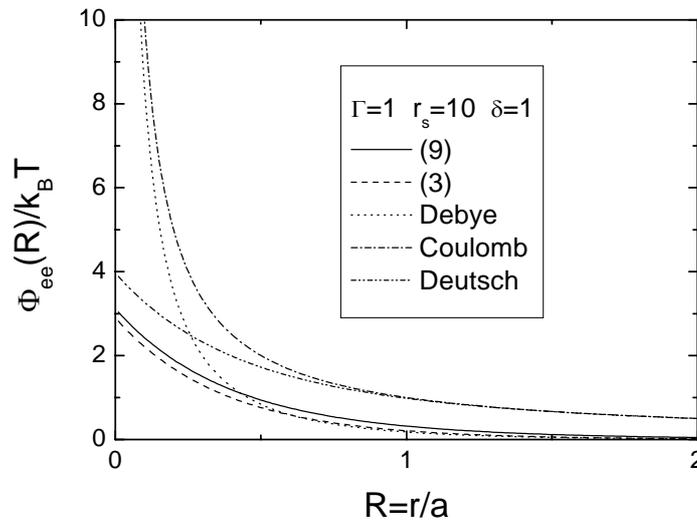


Рисунок 1 – Потенциалы взаимодействия электрон-электронной пары для $\delta = 1$

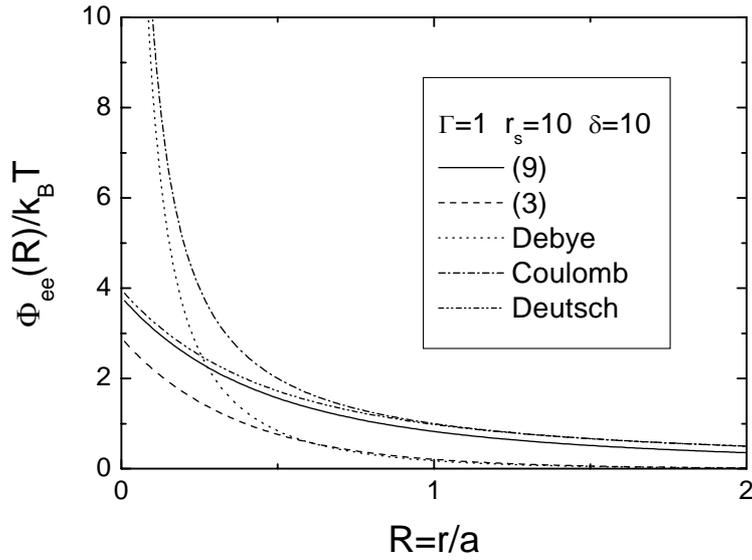


Рисунок 2 – Потенциалы взаимодействия электрон-электронной пары для $\delta = 10$

III. Дифференциальные сечения рассеяния. Данные по сечениям рассеяния являются основой для вычисления транспортных коэффициентов плотной плазмы, область использования которой весьма широка. Для высокотемпературной квазиклассической плазмы дифференциальное сечение рассеяния частиц можно качественно исследовать на основе формулы Борна [7]:

$$\sigma(\theta, k) = \frac{4\pi m^2}{h^4} \left| \int \Phi(r) e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}} d\vec{r} \right|^2 2\pi \sin\theta d\theta, \quad (10)$$

где $\Phi(r)$ – потенциал взаимодействия сталкивающейся пары частиц, \vec{k}_0 и \vec{k} – волновые векторы налетающей частицы до и после столкновения, при упругом рассеянии $k = k_0$, θ – угол рассеяния, который для упругого рассеяния связан с волновыми векторами следующим соотношением $|\vec{k} - \vec{k}_0| = q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$.

В рамках модели (3), учитывающей как статическую экранировку, так и эффект дифракции, в работах [8, 9] были исследованы столкновительные и транспортные свойства квазиклассической плотной плазмы и была получена формула для дифференциального сечения рассеяния, которую можно переписать в безразмерном виде как:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \kappa) / a^2 &= \frac{4r_s^2}{(1 - \frac{24\Gamma^2}{\pi r_s})} \left(\frac{1}{A+C} - \frac{1}{B+C} \right)^2; \\ A &= \frac{\pi r_s}{4\Gamma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{24\Gamma^2}{\pi r_s}} \right); \\ B &= \frac{\pi r_s}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{24\Gamma^2}{\pi r_s}} \right); \\ C &= 4(k^*)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}; \quad k^* = ka. \end{aligned} \quad (11)$$

Для расчета дифференциального сечения рассеяния электронов на заряженных частицах в рамках динамической модели взаимодействия (9) с использованием формулы Борна было получено следующее выражение:

$$\sigma(\theta, \kappa) / a^2 = \frac{4r_s^2}{\left(1 - \frac{24\Gamma^2}{\pi(r_s + (k^*)^2\Gamma)}\right)} \left(\frac{1}{A+C} - \frac{1}{B+C}\right)^2;$$

$$A = \frac{\pi r_s}{4\Gamma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{24\Gamma^2}{\pi(r_s + (k^*)^2\Gamma)}}\right);$$

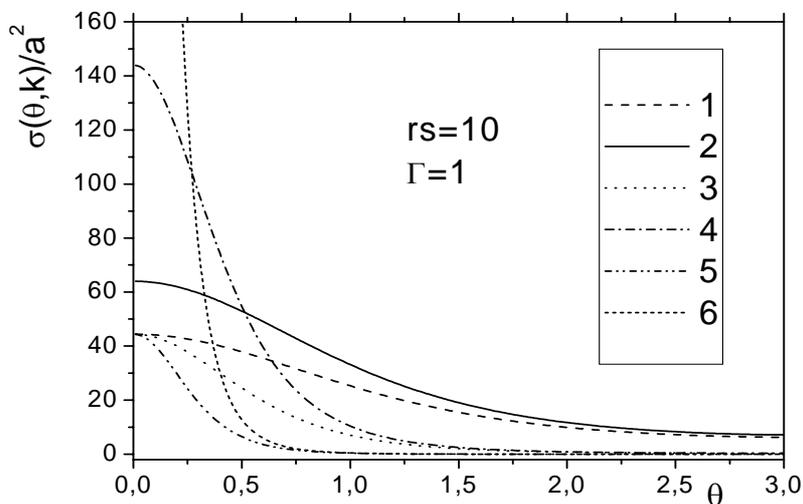
$$B = \frac{\pi r_s}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{24\Gamma^2}{\pi(r_s + (k^*)^2\Gamma)}}\right);$$

$$C = 4(k^*)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$
(12)

где отношение квадрата скорости налетающей частицы к квадрату тепловой выражено через параметры связи, плотности и безразмерный волновой вектор, который определяет величину скорости налетающей частицы:

$$\left(\frac{v^2}{v_{Th}^2}\right) = \frac{\Gamma}{r_s} (k^*)^2; \quad k^* = ka.$$
(13)

На рисунке 3 приведены сечения рассеяния, рассчитанные по формулам (11) и (12) при разных значениях волнового вектора. Как видно из этого рисунка, сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (3), имеет одно и то же конечное значение при угле рассеяния, равном нулю, так как экранировка в рамках модели (3) не зависит от скорости (импульса) налетающей частицы. Между тем дифференциальное сечение рассеяния, полученное на основе динамического потенциала (9), на малых углах рассеяния имеет конечное значение, зависящее от скорости налетающей частицы. Чем больше волновой вектор, тем, естественно, быстрее убывает сечение с ростом угла рассеяния, а конечное значение при $\theta \rightarrow 0$ становится больше, что связано с ослаблением экранировки.



- 1 – сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (3), $k=1$,
- 2 – сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (9), $k=1$,
- 3 – сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (3), $k=2$,
- 4 – сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (9), $k=2$,
- 5 – сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (3), $k=4$,
- 6 – сечение рассеяния, полученное на основе потенциала (9), $k=4$.

Рисунок 3 – Дифференциальное сечение рассеяния электрона

Закключение. Была построена динамическая модель взаимодействия частиц неидеальной квазиклассической плазмы. В данной модели учитывалась динамическая экранировка поля заряженных частиц, которая слабее статической экранировки. В динамической модели радиус

экранировки зависит от скорости налетающей частицы, уменьшаясь при росте последней. Также в данной модели учитывается эффект дифракции поля заряженных частиц, проявляющийся на малых расстояниях в виде конечности потенциала при нулевом межчастичном расстоянии. Динамический потенциал при малых скоростях сталкивающихся частиц стремится к эффективному потенциалу со статической экранировкой, а при больших скоростях стремится к потенциалу Дойча, не учитывающему экранировку.

В рамках полученной динамической модели были исследованы важные характеристики столкновительных процессов, такие, как дифференциальные сечения рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. – М.: Мир, 1974. – С. 432.
- 2 Barker A.A. Effective potential between the components of a hydrogenous plasma // J. Chem. Phys. – 1971. – Vol. 55, N 4. – P. 1751-1759.
- 3 Deutsch C. // Phys. Lett. A. – 1977. – Vol. 60. – P. 317-332.
- 4 Deutsch C., Furutani Y., Gombert M.M. // Phys. Rep. – 1981. – Vol. 69. – P. 85-92.
- 5 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N. Effective screened potentials of strongly coupled semiclassical plasma // Phys. Plasmas. – 2002. – Vol. 9. – P. 3758-3761.
- 6 Kremp D., Schalgel M., Kraeft W.-D. Quantum Statistics of Nonideal Plasmas. – Berlin: Springer, 2005. – 326 p.
- 7 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – Издание 4-е. – М.: Наука, 1989. – 768 с.
- 8 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Gabdullin M.T., Akbarov A.Zh., Nigmatova G.N. Thermodynamic and transport properties of nonideal complex plasmas on the basis of pseudopotential models // Contr. Plasma Physics. – 2007. – Vol. 47. – P. 262-266.
- 9 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Akbarov A.Zh., Gabdullin M.T. The scattering cross sections and radial distribution functions for a dense semiclassical plasma // PLTP. – Kiev: Naukova dumka, 2004. – P. 5.9.103.

REFERENCES

- 1 Jekker G. Teorija polnost'ju ionizovannoj plazmy. – M.: Mir, 1974. – S. 432.
- 2 Barker A.A. Effective potential between the components of a hydrogenous plasma // J. Chem. Phys. – 1971. – Vol. 55, N 4. – P. 1751-1759.
- 3 Deutsch C. // Phys. Lett. A. – 1977. – Vol. 60. – P. 317-332.
- 4 Deutsch C., Furutani Y., Gombert M.M. // Phys. Rep. – 1981. – Vol. 69. – P. 85-92.
- 5 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N. Effective screened potentials of strongly coupled semiclassical plasma // Phys. Plasmas. – 2002. – Vol. 9. – P. 3758-3761.
- 6 Kremp D., Schalgel M., Kraeft W.-D. Quantum Statistics of Nonideal Plasmas. – Berlin: Springer, 2005. – 326 p.
- 7 Landau L.D., Lifshic E.M. Kvantovaja mehanika (nereljativistskaja teorija). – Izdanie 4-e. – M.: Nauka, 1989. – 768 с.
- 8 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Gabdullin M.T., Akbarov A.Zh., Nigmatova G.N. Thermodynamic and transport properties of nonideal complex plasmas on the basis of pseudopotential models // Contr. Plasma Physics. – 2007. – Vol. 47. – P. 262-266.
- 9 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Akbarov A.Zh., Gabdullin M.T. The scattering cross sections and radial distribution functions for a dense semiclassical plasma // PLTP. – Kiev: Naukova dumka, 2004. – P. 5.9.103.

Резюме

Қ. Н. Жұмағұлова, Е. О. Шаленов, Г. Л. Ғабдуллина

(ЭТФҒЗИ, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

КВАЗИКЛАССИКАЛЫҚ ПЛАЗМАНЫҢ ЗАРДЯТАЛҒАН БӨЛШЕКТЕРІ ӘРЕКЕТТЕСУІНІҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ӘЛЕУЕТІ ЖӘНЕ ШАШЫРАУ ҚИМАЛАРЫ

Идеал емес квазиклассикалық плазманың зарядталған бөлшектері әрекеттесуінің динамикалық үлгісі ұсынылған. Бұл үлгіде дифракцияның кванттық-механикалық әсерлері және динамикалық экрандалу әсері ескеріледі. Зарядталған бөлшектердің өзара әрекеттесулерінің динамикалық әлеуеті негізінде электрондардың шашырау қималары зерттелген. Қорытынды жасалды.

Кілт сөздер: әрекеттесудің динамикалық әлеуеті, динамикалық экрандалу, квазиклассикалық плазма, шашырау қималары.

Summary

K. N. Dzhumagulova, E. O. Shalenov, G. L. Gabdullina

(IETP, al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

**DYNAMIC POTENTIAL OF INTERACTION AND THE SCATTERING CROSS SECTION
OF CHARGED PARTICLES SEMICLASSICAL PLASMAS**

The paper presents a dynamic model of the charged particles interaction in the nonideal semiclassical plasmas. This model takes into account the quantum mechanical effects of diffraction and the effect of dynamic screening. Based on the dynamic potential of the charged particles interaction the scattering cross sections of the electrons were obtained. Conclusions are made.

Keywords: dynamic interaction potential, dynamic screening, quasiclassical plasma cross section.

Поступила 18.01.2013г.

УДК

А. С. АСКАРОВА, С. А. БОЛЕГЕНОВА, В. Ю. МАКСИМОВ,
А. М. МАКСУТХАНОВА, Ж. К. ШОРТАНБАЕВА, Г. К. МУКАШЕВА,
Н. Б. РАХИМБАЕВА, Б. О. КОНАКБАЕВ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УГОЛЬНЫХ ТЕПЛОСТАНЦИЙ

Аннотация

Показана математическая модель процесса горения различных топлив в камерах сгорания. Раскрыты технические характеристики и физическая модель котла БКЗ160. В результате численного моделирования характеристик угольных теплостанций проведен анализ влияния «Overfire Air Technology» и составлена математическая модель.

Ключевые слова: моделирование, теплостанция, физическая модель, математическая модель, камера сгорания.

Кілт сөздер: үлгілеу, жылу станциясы, физикалық үлгі, математикалық үлгі, жану камерасы.

Keywords: modeling, heating plant, the physical model, mathematical model, the combustion chamber.

Модернизация процессов горения различных топлив в камерах сгорания энергетических котлов малой и средней мощности, обеспечивающая более рациональное сжигание топлива, повышение эффективности поверхности теплосъема, приспособление котлов к работе на низкокалорийных и местных видах топлива экономически более выгодно, чем их полная замена.

В последние годы за рубежом при проектировании и модернизации котлов, промышленных печей и камер сгорания широкое распространение получили компьютерные технологии, основанные на математическом моделировании термогазодинамики внутрикотлового пространства (горение, тепло- и массообмен) с помощью быстродействующей компьютерной техники. Для этой цели разработаны и применяются коммерческие пакеты универсальных программ, использующие последние достижения вычислительной техники, математики, гидродинамики, горения, тепло- и массообмена.

Математическое описание физических и химических процессов основано на решении уравнений баланса. В общем виде все эти уравнения содержат: конвективный член, диффузионный член, источниковый/стоковый член:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_{\phi, \text{eff}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + S_{\phi} \quad (1)$$

Каждый закон сохранения выражен соответствующим дифференциальным уравнением. Каждое уравнение записывается для конкретного физического параметра и учитывает баланс различных факторов, влияющих на изменение величины.

Источниковый или стоковый член S_{ϕ} – алгебраический член, который описывает появление или исчезновение величины Φ (например, выделение или поглощение энергии в химических реакциях, образование и разложение продуктов реакции горения и др.)

В данной работе вычислительный эксперимент проводился на основе решения трехмерных уравнений конвективного теплопереноса с учетом распространения тепла, теплового излучения, химических реакций и многофазности среды. Для описания трехмерного движения реагирующих течений в камере используется система дифференциальных уравнений [1]:

Уравнение баланса массы или уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \quad (2)$$

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{i,j}) - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3)$$

Здесь f_i – объемные силы; τ_{ij} – тензор напряжений.

Определим начальные и граничные условия для поставленной задачи:

для скорости:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|_{normA} = 0 \text{ – производная, нормальная к плоскости выхода;}$$

$$u_i \Big|_{normS} = 0 \text{ – скорость, нормальная к плоскости симметрии;}$$

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|_{normS} = 0 \text{ – производная, нормальная к плоскости симметрии;}$$

$$u_i \Big|_{normW} = 0 \text{ – скорость, нормальная к стенке, т.е. нет потока массы;}$$

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|_{normW} = 0 \text{ – производная, нормальная к стенкам;}$$

$$u_i \Big|_{tang} = 0 \text{ – скорость, тангенциальная к стенкам, условие прилипания;}$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_i} \right|_{rand} = 0 \text{ – поправка на давление на границе.}$$

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h) - \frac{\partial q_i^{res}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial \tau} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + s_q \quad (4)$$

Здесь h – энтальпия; S_q – источник энергии.

Закон сохранения для компоненты вещества:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_\beta) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho c_\beta u_i) - \frac{\partial j_i}{\partial x_i} + R_\beta, \quad (5)$$

где $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $\beta = 1, 2, 3, \dots, N$; R_β – источник вещества.

Для моделирования турбулентной вязкости и замыкания системы использовалась стандартная k - ε модель турбулентности.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \Pi - \rho \varepsilon, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Pi - c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (7)$$

где

$$\Pi = \left[\mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{i,j} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (8)$$

а также модельное соотношение для турбулентной вязкости:

$$\mu_t = c_\mu \rho k^2 \quad (9)$$

Все уравнения системы записаны для средних значений параметров.

Для проведения вычислительных экспериментов по исследованию влияния OFA технологии выбраны действующие камеры сгорания ТЭС Казахстана: камера сгорания БКЗ160 Алматинской ТЭС. Организация топочного процесса в выбранных камерах сгорания имеет различный характер,

проведение вычислительных экспериментов позволит определить эффективность технологии OFA на разных котельных установках.

Камера сгорания БКЗ160 Алматинской ТЭС имеет расчетную паропроизводительность 160 т/ч, при давлении 9,8 МПа и температуре перегрева пара 540 °С. Тепловая мощность топки 124,4 МВт. По боковым сторонам топочной камеры расположены 4 блока прямоточных щелевых горелок, направленных по касательной к центральной окружности.

На рисунке 1 показан общий вид.

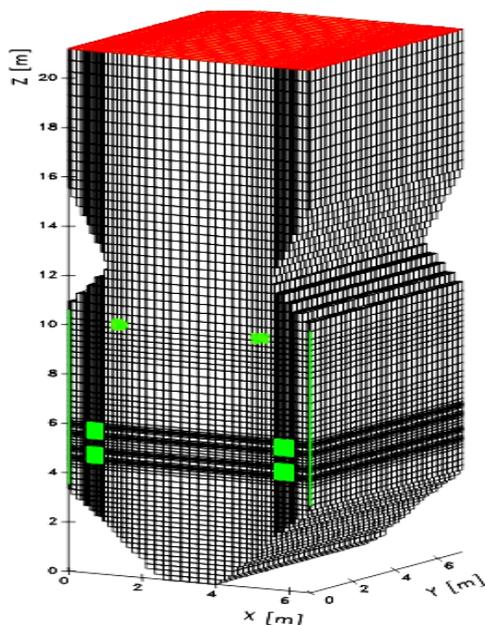


Рисунок 1 – Общий вид топочной камеры котла БКЗ160 и разбивка ее на контрольные объемы

В нашем случае для исследования влияния OFA выбрано 2 режима: 10 и 20% общего объема воздуха подается через инжекторы в верхней части камеры сгорания. На рисунках 2–5 приведены результаты вычислительных экспериментов.

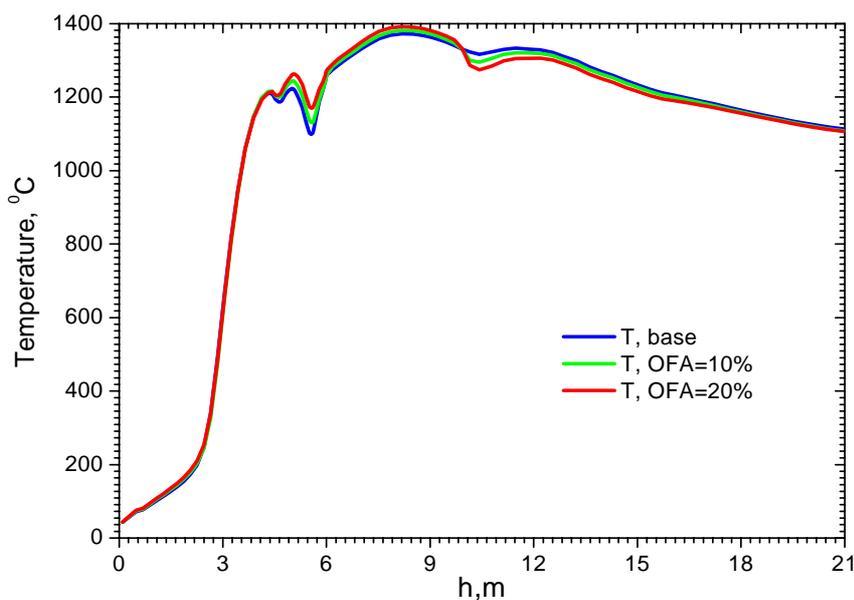


Рисунок 2 – Влияние OFA на распределение температуры в объеме камеры сгорания БКЗ160

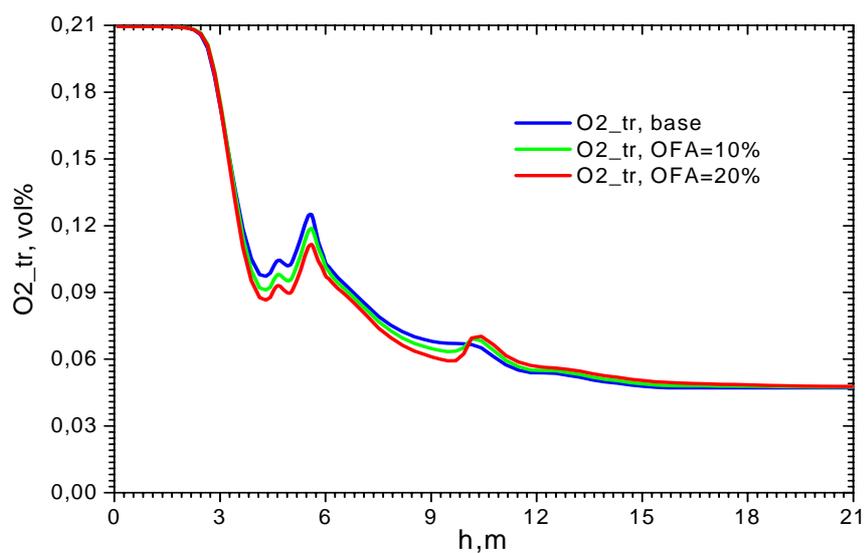


Рисунок 3 – Влияние OFA на распределение концентрации кислорода в объеме камеры сгорания БКЗ160

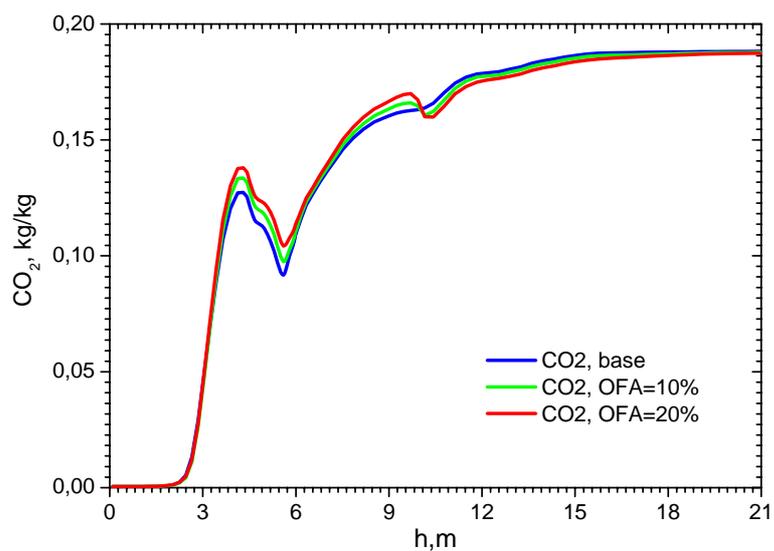


Рисунок 4 – Влияние OFA на распределение концентрации диоксида углерода в объеме камеры сгорания БКЗ160

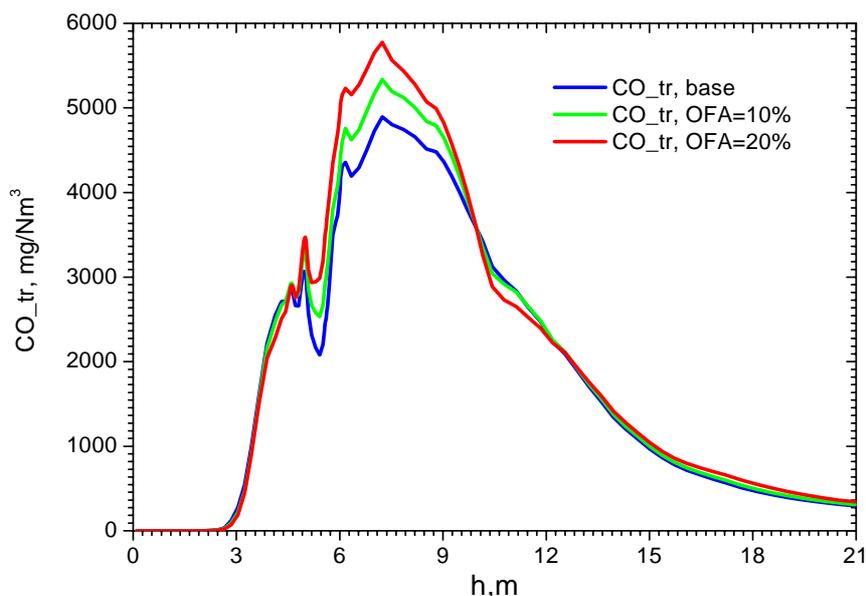


Рисунок 5 – Влияние OFA на распределение концентрации оксида углерода в объеме камеры сгорания БКЗ160

Снижение концентрации кислорода в области наиболее интенсивного горения приводит к повышению температуры пламени и снижению общего коэффициента избытка воздуха в этой зоне. В результате повышения температуры снижается уровень выбросов от неполного сгорания, увеличивается скорость элементарных реакций и повышается качество смешения, что сокращает время пребывания, необходимое для смешения топливного газа и вторичного воздуха горения. Однако это не приводит к автоматическому снижению уровня выбросов NOx. Эффективное снижение выбросов NOx может быть обеспечено на следующей стадии, когда воздух инжектируется через OFA.

OFA инжекторы наиболее выгодно располагать в области выше основной зоны горения и на максимально возможно большем расстоянии от самой узкой части камер сгорания. При введении дополнительного кислорода воздуха в OFA наблюдается дальнейшее окисление CO, движущегося в направлении к выходу, и таким образом происходит преобразование CO в CO₂. Кроме того, размещение инжекторов OFA именно в этой области позволяет интенсифицировать смешивание OFA воздуха с CO, в общем потоке горючих газов. А это в свою очередь позволяет максимально преобразовать CO в CO₂ прежде, чем существенная часть CO выйдет из камеры сгорания. Таким образом, применение OFA технологии, позволяет не допустить увеличения формирования диоксидов углерода на выходе из камер сгорания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аскарлова А.С. Тепломассоперенос при сжигании твердого топлива в промышленных котлах на примере павлодарской ТЭЦ // Теплофизика и аэромеханика. – Новосибирск, 2001. Т. 7, № 2. – С. 293-300.
- 2 Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Лавришцева Е.И., Локтионова И.В. Численное моделирование топочных процессов при горении высокозольного экибастузского угля // Теплофизика и Аэромеханика. – 2002. – Т. 9, № 4. – С. 585-596.
- 3 Askarova A.S., Heierle Ye., Leithner R., Müller H. CFD simulationen der NOx production in Kohlenstaub-befeuerten Brennkammern. VDI-Berichte 2056, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2009. – S. 575-579.

REFERENCES

- 1 Askarova A.S. Teplomassoperenos pri szhiganii tverdogo topliva v promyshlennyh kotlah na primere pavlodarskoj TJeC // Teplofizika i ajeromehanika. – Novosibirsk, 2001. T. 7, № 2. – S. 293-300.
- 2 Askarova A.S., Bolegenova S.A., Lavrishheva E.I., Loktionova I.V. Chislennoe modelirovanie topochnyh processov pri gorenii vysokozol'nogo jekibastuzskogo uglja // Teplofizika i Ajeromehanika. – 2002. – T. 9, № 4. – S. 585-596.
- 3 Askarova A.S., Heierle Ye., Leithner R., Müller H. CFD simulationen der NOx production in Kohlenstaub-befeuerten Brennkammern. VDI-Berichte 2056, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2009. – S. 575-579.

Резюме

*А. С. Асқарова, С. А. Бөлегенова, В. Ю. Максимов, А. М. Мақсұтханова,
Ж. К. Шортанбаева, Г. К. Мұқашева, Н. Б. Рахымбаева, Б. О. Қонақбаев*

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

КӨМІР ЖЫЛУСТАНЦИЯЛАРЫН САНДЫҚ ҮЛГІЛЕУДІҢ СИПАТТАМАЛАРЫ

Жану камерасында қатты отынның жану үдерісінің математикалық үлгісі көрсетілді. БКЗ160 қазанының техникалық сипаттамасы және физикалық үлгісі өңделді. Жану камерасында отынның жану үдерісі үлгісінің сандық тәжірибе нәтижесінде «Overfire Air Technology» әсеріне зерттеу жүргізіліп математикалық үлгісі алынды.

Кілт сөздер: үлгілеу, жылу станциясы, физикалық үлгі, математикалық үлгі, жану камерасы.

Summary

*A. S. Askarova, S. A. Bolegenova, V. Yu. Maximov, A. M. Maksuthanova,
J. K. Shortanbaeva, G. K. Mukasheva, N. B. Rakhimbayeva, B. O. Konakbaev*

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

NUMERICAL MODELING OF CHARACTERISTICS COAL HEATING PLANT

In this paper we have described a mathematical model of the process of burning solid fuel in the combustion chamber. The physical model has developed and the technical details BKZ160 camera have described. A study the effect of «Overfire Air Technology» on the results of computational experiments on the modeling of combustion in the combustion chamber was conducted on the basis of the mathematical model.

Keywords: modeling, heating plant, the physical model, mathematical model, the combustion chamber.

Поступила 31.01.2013г

УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы)

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Аннотация

В работе изучаются две пространственные задачи Геллерстедта для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Показано, что одна из них имеет бесчисленное множество решений, а другая – однозначна и разрешима.

Ключевые слова: пространственные задачи, многомерное уравнение, бесчисленное множество, задача Геллерстедта, уравнение Лаврентьева-Бицадзе.

Кілт сөздер: кеңістікті есептер, көпөлшемді тендеу, көп шешімділік, Геллерстед есебі, Лаврентьев-Бицадзе тендеуі.

Keywords: three-dimensional problems, the multidimensional equation, countless, the task Gellersteda, Lavrent'ev-Bitsadze.

Пусть D – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная в полупространстве $t > 0$ сферической поверхностью $\Gamma: |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_0: |x| = -t$, $K_1: |x| = 1 + t$, $-1/2 \leq t \leq 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S – общую часть границ области D^+ , D^- , представляющих множество $\{t=0, 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m . Часть конусов K_0 , K_1 , ограничивающих области D^- , обозначим через S_0 , S_1 соответственно.

В области D рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$\Delta_x u + \operatorname{sgn} t u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$, которое играет важную роль в теории обтекания тонких тел [1].

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

В [2, 3] качестве многомерного аналога задачи Геллерстедта для уравнения (1) предложены следующие.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(r, \theta), u|_{S_0} = \sigma_0(r, \theta), \quad (2)$$

или

$$u|_{\Gamma} = \varphi(r, \theta), u|_{S_1} = \sigma_1(r, \theta). \quad (3)$$

Отметим, что при $m = 2$ задача (1), (2) изучена в [4], а [5] в одном частном случае исследована задача (1), (3).

Пусть $\{ Y_{n,m}^k(\theta) \}$ – система линейно – независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,\dots$, – пространство Соболева, а $\tilde{S} = \left\{ (r, \theta) \in S, 0 < r < \frac{1}{2} \right\}$.

Имеет место ([6])

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом $f_n^k(r) = \int_H f(r, \theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH$, где H – единичная сфера в E_m .

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^l(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Тогда справедливы

Теорема 1. Однородная задача, соответствующая задаче (1),(2) имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Теорема 2. Если $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $\sigma_0(r, \theta) = r\sigma_0^*(r, \theta)$, $\sigma_0^*(r, \theta) \in W_2^l(\tilde{S})$, $l > (3m+8)/2$, то задача (1),(2) имеет бесчисленное множество решений.

Теорема 3. Если $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $\sigma_1(r, \theta) = (r - \frac{1}{2})^{(m+1)/2} \sigma_1^*(r, \theta)$, $\sigma_1^*(r, \theta) \in W_2^l(S|\tilde{S})$, $l > (3m+4)/2$, то задача (1),(3) разрешима однозначно.

Доказательство теорем. В сферических координатах уравнения (1) в области D^+ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} = 0, \quad (5)$$

где

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} (\sin^{m-j-1} \theta_j) \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [6], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n=0,1,\dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области D^+ принадлежит классу $C(D^+ \cup S) \cap C^2(D^+)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([6]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

при этом первое условие краевых условий (2) и (3) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\bar{u}_n^k \left(r, \sqrt{1-r^2} \right) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (8)$$

В (7), (8), произведя замену переменных переменных $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} u_n^k(r, t)$, а затем, полагая $r = \rho \cos \varphi$, $t = \rho \sin \varphi$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, получим

$$v_{n\rho\rho}^k + \frac{1}{\rho} v_{n\rho}^k + \frac{1}{\rho^2} v_{n\varphi\varphi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\rho^2 \cos^2 \varphi} v_n^k = 0, \quad (9)$$

$$v_n^k(1, \varphi) = g_n^k(\varphi), \quad (10)$$

где $v_n^k(\rho, \varphi) = u_n^k(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, $\bar{\lambda}_n = [(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]/4$, $g_n^k(\varphi) = (\cos \varphi)^{(m-1)/2} \bar{\varphi}_n^k(\cos \varphi)$.

Решение задачи (9),(10) будем искать в виде

$$v_n^k(\rho, \varphi) = R(\rho)\phi(\varphi). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), будем иметь

$$\rho^2 R_{\rho\rho} + \rho R_{\rho} - \mu R = 0, \quad (12)$$

$$\phi_{\varphi\varphi} + \left(\mu + \frac{\bar{\lambda}_n}{\cos^2 \varphi} \right) \phi = 0, \quad \mu = const. \quad (13)$$

Ограниченным решением уравнения (12) является функция $R(\rho) = \rho^s$, $\mu = s^2$, $0 \leq s = const$.

Далее уравнение (13) запишем следующим образом

$$\phi_{\varphi\varphi} = \left[\frac{l(l-1)}{\cos^2 \varphi} - s^2 \right] \phi = 0, \quad l = -n - (m-3)/2. \quad (14)$$

В уравнении (14) произведя замену переменных $\xi = \sin^2 \varphi$ приходим к уравнению

$$\xi(\xi-1)g_{\xi\xi} + \left[(\alpha + \beta + 1)\xi - \frac{1}{2} \right] g_{\xi} + \alpha\beta g = 0, \quad (15)$$

$$g(\xi) = \Phi(\varphi) / \cos^l \varphi, \quad \alpha = (l+s)/2, \quad \beta = (l-s)/2,$$

Общее решение уравнения (15) представимо по формуле ([7])

$$g_s(\xi) = c_{1s} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \xi\right) + c_{2s} \sqrt{\xi} F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \xi\right), \quad (16)$$

которая периодическая по φ , если $s = 0, 1, \dots$, где c_{1s}, c_{2s} – произвольные независимые постоянные, а $F(\alpha, \beta, \gamma; \xi)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом, из (11), (16) вытекает, что общее решение уравнения (9) запишется в виде

$$v_n^k(\rho, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \cos^l \varphi \left[c_{1s} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) + c_{2s} \sin \varphi F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{3}{2}; \sin^2 \varphi\right) \right]. \quad (17)$$

так как $\left| v_n^k\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \right| < \infty$ – то из (17) будет иметь

$$c_{1s} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; 1\right) + c_{2s} F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{3}{2}; 1\right) = 0,$$

или

$$c_{2s} = - \frac{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} c_{1s}, \quad (18)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Подставляя (18) в (17), получим

$$v_n^k(\rho, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{1s} \rho^s \cos^s \varphi \left[F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) - \frac{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} - \sin \varphi F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sin^2 \varphi\right) \right]. \quad (19)$$

Известно ([8]), что система функций $\left\{ \frac{1}{2}, \cos 2s\varphi, \sin 2s\varphi, s = 1, 2, \dots \right\}$ полна, ортогональна в $C([0, \pi])$, следовательно и замкнута.

Отсюда следует, что функция $g_n^k(\varphi) \in C([0, \pi])$, разложима в ряд

$$g_n^k(\varphi) = a_{n,0}^k + \sum_{s=1}^{\infty} \left(a_{n,s}^k \cos 2s\varphi + b_{n,s}^k \sin 2s\varphi \right), \quad (20)$$

где

$$a_{n,0}^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_n^k(\varphi) d\varphi, \quad a_{n,s}^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_n^k(\varphi) \cos 2s\varphi d\varphi, \quad (21)$$

$$b_{n,s}^k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_n^k(\varphi) \sin 2s\varphi d\varphi, \quad s = 1, 2, \dots$$

Далее, удовлетворяя функцию (19), условию (10), учитывая разложение (20) и полагая $\varphi = 0$, получим

$$c_{1s} = a_{n,s}^k, \quad s = 0, 1, \dots \quad (22)$$

Таким образом, из (6), (19), (22) следует, что решением задачи (5),(8) в области D^+ является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=p}^{\infty} a_{n,s}^k \left(t^2 + r^2 \right)^{\frac{s+n}{2} + \frac{(m-3)}{4}} r^{2-m-n} \times$$

$$\times \left[F\left(-\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} + \frac{s}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} - \frac{s}{2}, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{r^2 + t^2} \right) - \right.$$

$$\frac{2\Gamma\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} + \frac{s}{2}\right)} t \left(t^2 + r^2 \right)^{-1/2} \times$$

$$\left. \times F\left(-\frac{n}{2} + \frac{5-m}{4} + \frac{s}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{5-m}{4} - \frac{s}{2}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{r^2 + t^2} \right) \right] Y_{n,m}^k(\theta), \quad (23)$$

Из (23) при $t \rightarrow +0$ будем иметь

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=p}^{\infty} a_{n,s}^k r^{s+(1-m)/2} Y_{n,m}^k(\theta),$$

где $p \geq (m+1)/2$, а $a_{n,s}^k$ определяются из (21).

Если $\varphi(r, \theta) \equiv 0$, то из (10),(21) следует $a_{n,s}^k = b_{n,s}^k = 0, s = 0, 1, \dots$, что означает $u(r, \theta, t) \equiv 0, \forall (r, \theta, t) \in D^+$.

Следовательно, однородная задача, соответствующая задаче (1), (2) сводится к задаче Дарбу в области D^- для волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad (24)$$

с данными $u|_S = 0, u|_{S_0} = 0$, имеющее бесчисленное множество нетривиальных решений ([9]).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Известно, что, если $g_n^k(\varphi) \in C^q((0, \pi))$, то имеет место оценка ([10])

$$|a_{n,s}^k| \leq \frac{c_1}{s^{q+2}}, q = 0, 1, \dots,$$

а также справедливы формулы ([11])

$$\frac{d^q}{dz^q} F(a, b, c; z) = \frac{(a)_q (b)_q}{(c)_q} F(a+q, b+q, c+q; z),$$

$$(a)_q = \frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)}, \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta} \left[1 + \frac{1}{2z} (\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1) + O(z^{-2}) \right]$$

и оценки ([6])

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_1 n^{\frac{m}{2}-1+q}, j = \overline{1, m-1}.$$

Из теоремы вложения ([12]) следует, что $W_2^l(S) \subset C^q(S) \cap C(\bar{S})$, если $l > q + m/2$.

Из вышеизложенного, учитывая лемму 2, а также граничное условие $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > (3m+8)/2$, получим, что решение (23) $u(r, \theta, t) \in C(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+)$, при этом $\tau(r, \theta) = r\tau^*(r, \theta), \tau^*(r, \theta) \in W_2^l(S)$.

Таким образом, неоднородная задача (1), (2) приводится к задаче Дарбу для уравнения (24) с условиями $u|_S = \tau(r, \theta), u|_{S_0} = \sigma_0(r, \theta)$, которое, как показано в [13], имеет бесчисленное множество решений.

В свою очередь, задача (1), (3) сводится к задаче Дарбу для (24) с данными $u|_S = \tau(r, \theta), u|_{S_0} = \sigma_1(r, \theta)$, которое однозначно разрешима ([13]).

Теорема 2 и 3 установлена.

Отметим, что спектральные задачи Геллерстедта для уравнения (1) изучены в [14].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Pivko S. On nonlinear effects in stender and a related one // Publ. Inst. Math. N. S. – 1969. – Vol. 9(23).
- 2 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
- 3 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
- 4 Пулькин С.В. Сингулярная задача Трикоми // Труды третьего Всесоюзного математического съезда. – 1956. – Т. 1. – С. 65-66.
- 5 Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // ДАН СССР. – 1956. – Т. 110, № 6. – С. 901-902.
- 6 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- 7 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
- 8 Колмогоров А.Н., Фомин С.Г. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
- 9 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
- 10 Смирнов В.И. Курс высшей математика. – Т. 2. – М.: Изд-во технико-геор. литература, 1950. – 622 с.
- 11 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 292 с.
- 12 Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 255 с.

13 Алдашев С.А. О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения // ДАН СССР. – 1982. – Т. 265, № 6. – С. 1289-1292.

14 Алдашев С.А. Собственные значения и собственные функции задачи Геллерстедта для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Укр. матем. журнал. – 2011. – Т. 63, № 6. – С. 827-832.

REFERENCES

- 1 Pivko S. On nonlinear effects in stender and a related one // Publ. P'inst. Math. N. S. – 1969. – Vol. 9(23).
- 2 Bicadze A.V. Uravnenija smeshannogo tipa. – M.: Izd-vo AN SSSR, 1959. – 164 s.
- 3 Nahushev A.M. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh. – M.: Nauka, 2006. – 287 s.
- 4 Pul'kin S.V. Singuljarnaja zadacha Trikomii // Trudy tret'ego Vsesojuznogo matematicheskogo s#ezda. – 1956. – Т. 1. – S. 65-66.
- 5 Bicadze A.V. K probleme uravnenij smeshannogo tipa v mnogomernyh oblastjah // DAN SSSR. – 1956. – Т. 110, № 6. – S. 901-902.
- 6 Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. – M.: Fizmatgiz, 1962. – 254 s.
- 7 Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. – M.: Nauka, 1965. – 703 s.
- 8 Kolmogorov A.N., Fomin S.G. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. – M.: Nauka, 1976. – 542 s.
- 9 Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskikh i smeshannyh uravnenij. – Almaty: Fylym, 1994. – 170 s.
- 10 Smirnov V.I. Kurs vysshej matematika. – Т. 2. – M.: Izd-vo tehniko-teor. literatura, 1950. – 622 s.
- 11 Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. – Т. 1. – M.: Nauka, 1973. – 292 s.
- 12 Sobolev S.L. Nekotorye primenenija funkcional'nogo analiza v matematikoj fizike. – Novosibirsk: Izd-vo SO AN SSSR, 1962. – 255 s.
- 13 Aldashev S.A. O nekotoryh kraevyh zadachah dlja mnogomernogo volnovogo uravnenija // DAN SSSR. – 1982. – Т. 265, № 6. – С. 1289-1292.
- 14 Aldashev S.A. Sobstvennye znachenija i sobstvennye funkcii zadachi Gellerstedta dlja mnogomernogo uravnenija Lavrent'eva–Bicadze // Ukr. matem. zhurnal. – 2011. – Т. 63, № 6. – С. 827-832.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университет, Алматы қ.)

КӨП ӨЛШЕМДІ ЛАВРЕНТЬЕВ–БИЦАДЗЕ ТЕНДЕУІ ҮШІН ЕКІ КЕҢІСТІКТІ ГЕЛЛЕРСТЕДТ ЕСЕБІ

Мақалада көп өлшемді Лаврентьев–Бицадзе теңдеуіне екі кеңістікті Геллерстедт есебі зерттелген. Біреуінің көп шешімділігі, ал екіншісінің – бір шешімділігі дәлелденген.

Кілт сөздер: кеңістікті есептер, көпөлшемді теңдеу, көп шешімділік, Геллерстедт есебі, Лаврентьев–Бицадзе теңдеуі.

Summary

S. A. Aldashev

(Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty)

SPATIAL PROBLEMS GELLERSTEDT FOR MULTIDIMENSIONAL LAVRENT'EV-BITSADZE

This paper studies two spatial Gellerstedt problems for the multi-dimensional Lavrentiev–Bitsadze equation. We show that one of them has infinitely many solutions, and the second is uniquely solvable.

Keywords: three-dimensional problems, the multidimensional equation, countless, the task Gellersteda, Lavrent'ev-Bitsadze.

Поступила 25.12.2012г.

Н. А. КАПАЛОВА

(Институт проблем информатики и управления, г. Алматы)

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ШИФРОВАНИЯ ЭЛЬ-ГАМАЛЯ НА БАЗЕ НЕПОЗИЦИОННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Аннотация

Представлены результаты модификации системы асимметричного шифрования по схеме Эль-Гамалья на базе непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС) и приведен контрольный пример. Использование НПСС при разработке и исследовании нетрадиционных алгоритмов и методов кодирования, шифрования и формирования электронной цифровой подписи и распределения криптографических ключей позволяет значительно повысить надежность и эффективность этих криптографических процедур. Схему Эль-Гамалья можно использовать как для цифровых подписей, так и для шифрования, криптографическая стойкость схемы основана на сложности проблемы дискретного логарифмирования в мультипликативной группе конечного поля. Она лежит в основе стандартов электронной цифровой подписи в США (DSA) и России. Надежность предлагаемого алгоритма повышается за счет выбора оснований НПСС и примитивных элементов. Все вычисления в НПСС производятся параллельно по модулям рабочих оснований, за счет этого сокращается время выполнения операций.

Ключевые слова: модификация, алгоритм, шифрование, системы счисления, Эль-Гамаль, цифровая подпись.

Кілт сөздер: модификация, алгоритм, шифрлау, есептеу жүйелері, Эль-Гамаль, сандық жазу.

Keywords: modification of the algorithm, encryption, number systems, El Gamal digital signature.

Введение. В 1976 г. У. Диффи и М. Хеллманом была опубликована работа, в которой изложены принципы криптографии с открытыми ключами. Рождение «новой криптографии» серьезно повлияло на дальнейшее развитие средств криптографии. Во-первых, алгоритмы криптографии с открытым ключом используют математические функции, отличные от подстановок и перестановок. Во-вторых, методы криптографии с открытым ключом являются асимметричными – в них используются два разных ключа при зашифровании и расшифровании. Это отличает их от методов традиционного (симметричного) шифрования, где предполагается только один секретный ключ. Идея применения двух разных ключей повлекла глубокие изменения в подходах к обеспечению конфиденциальности. Алгоритмы шифрования с открытым ключом зависят от одного ключа для зашифрования и другого, связанного с первым, ключа для расшифрования. Эти алгоритмы имеют следующую важную особенность:

- с точки зрения вычислений нереально определить ключ расшифрования, зная только используемый криптографический алгоритм и ключ зашифрования;
- любой из этих двух связанных ключей может служить для зашифрования, и тогда другой ключ может применяться для расшифрования.

Известными примерами систем шифрования с открытым ключом являются системы RSA, Эль-Гамалья, Мак-Элиса. Одним из заблуждений, касающийся шифрования с открытым ключом, было мнение, что шифрование с открытым ключом оказывается более универсальным подходом, что делает традиционное симметричное шифрование устаревшим. Но оказалось, что это не так, поскольку реализация схем шифрования с открытым ключом требует значительно больше вычислительных ресурсов, чем алгоритмы симметричных систем. Поэтому утверждения об отказе от схем традиционного шифрования явились необоснованными. Как отметил один из открывателей метода шифрования с открытым ключом Уитфилд Диффи, шифрование с открытым ключом нашло применение в сфере управления ключами и приложениях электронной цифровой подписи.

Использование непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС) при разработке и исследовании нетрадиционных алгоритмов и методов кодирования, шифрования и формирования

электронной цифровой подписи (ЭЦП) и распределения криптографических ключей позволяет значительно повысить надежность и эффективность этих криптографических процедур, уменьшить длину ЭЦП и дополнить ЭЦП свойством обнаружения ошибок и исправления одиночной ошибки [1-3].

Криптографическая стойкость системы шифрования Эль-Гамала с открытым ключом основана на сложности проблемы дискретного логарифмирования в мультипликативной группе конечного поля. Эта задача сложно реализуема для значений p , содержащих более 150 десятичных знаков. Рекомендуется выбирать p таким, чтобы число $p-1$ содержало большой простой делитель. Недостатком криптосистемы Эль-Гамала является удвоение длины открытого текста при шифровании, а также необходимость использования различных значений рандомизатора для зашифрования различных открытых текстов.

Модифицированный алгоритм шифрования Эль-Гамала на базе НПСС. Схему Эль-Гамала можно использовать как для цифровых подписей, так и для шифрования. Алгоритм Эль-Гамала не запатентован, он первый криптографический алгоритм с открытым ключом, пригодный для шифрования и цифровых подписей, применение которого не ограничено патентами США (срок патента Диффи-Хеллмана закончился 29.04.1997 г.). Схема Эль-Гамала лежит в основе стандартов электронной цифровой подписи в США (DSA) и России (ГОСТ Р 34.10-2001).

В работе представлены результаты модификации системы асимметричного шифрования по схеме Эль-Гамала, на базе НПСС. Разработанный нетрадиционный асимметричный алгоритм шифрования электронного сообщения M по схеме Эль-Гамала осуществляется следующим образом [1-4].

1. Вначале формируется НПСС: ее основаниями (рабочими) выбираются неприводимые многочлены

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x) \quad (1)$$

над полем $GF(2)$ степени m_1, m_2, \dots, m_s соответственно так, чтобы вычеты по этим основаниям покрывали длину подписываемого сообщения. Полиномы (1) с учетом порядка их расположения образуют одну систему оснований. В соответствии с Великой китайской теоремой об остатках все основания должны быть различными, в том числе и тогда, когда они имеют одну степень. Рабочий диапазон НПСС определяется многочленом (модулем) $P_s(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_s(x)$ степени

$m = \sum_{i=1}^s m_i$. В этой системе любой многочлен $F(x)$, степени меньшей m , имеет единственное

представление вида

$$F(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_s(x)), \quad (2)$$

где $F(x) \equiv z_i(x) \pmod{p_i(x)}$, $i = \overline{1, S}$. По виду (2) восстанавливается позиционное представление $F(x)$ с использованием следующей формулы:

$$F(x) = \sum_{i=1}^s z_i(x) B_i(x), \text{ где } B_i(x) = \frac{P_s(x)}{p_i(x)} M_i(x) \equiv 1 \pmod{p_i(x)}. \quad (3)$$

Затем сообщение M длиной N бит интерпретируется как последовательность остатков $z_1(x), z_2(x), \dots, z_s(x)$ от деления некоторого многочлена $M(x)$, степени меньше m на рабочие основания $p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x)$ соответственно и записывается в непозиционном виде в виде последовательности вычетов:

$$M(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_s(x)), \quad (4)$$

где $M(x) \equiv z_i(x) \pmod{p_i(x)}$, $i = \overline{1, S}$. Далее многочлен $M(x)$ будет записываться без аргумента, т.е. в виде M .

Для каждого основания $p_i(x)$ выбирается примитивный элемент (многочлен) $\alpha_i(x)$ из полной системы вычетов по модулю $p_i(x)$, т.е. степени $\alpha_i(x)$ не превышают m_i , где $i = \overline{1, S}$. Тогда примитивный элемент нетрадиционного алгоритма шифрования интерпретируется как последова-

тельность остатков от деления некоторого многочлена $\alpha(x)$ на основания $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$ соответственно:

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_S(x)) ,$$

где $\alpha(x) \equiv \alpha_i(x) \pmod{p_i(x)}$, $i = \overline{1, S}$. Выбранные рабочие основания и соответствующие им примитивные многочлены $\alpha_i(x)$ содержатся в секрете.

Далее определяются базисы НПСС по формуле (3) для восстановления результата в позиционном виде по его остаткам. Для этого вычисляются многочлены

$$\delta_i(x) \equiv \frac{P_S(x)}{p_i(x)} \pmod{p_i(x)}$$

и инверсные к ним полиномы $\delta_i^{-1}(x)$:

$$\delta_i^{-1}(x)\delta_i(x) \equiv 1 \pmod{p_i(x)} .$$

Тогда базисы находятся по формуле

$$B_i(x) = \delta_i^{-1}(x) \frac{P_S(x)}{p_i(x)} ,$$

которые также являются секретными параметрами алгоритма.

2. Затем пользователи A и B независимо друг от друга выбирают соответственные личные (закрытые) ключи $l < l_A, l_B < 2^m$.

3. Потом пользователи A и B вычисляют третий элемент открытого ключа соответственно:

$$\beta_A(x) = (\beta_{A_1}(x), \beta_{A_2}(x), \dots, \beta_{A_S}(x)) , \text{ где } \beta_{A_i}(x) \equiv \alpha_i^{l_A}(x) \pmod{p_i(x)} , i = \overline{1, S} ;$$

$$\beta_B(x) = (\beta_{B_1}(x), \beta_{B_2}(x), \dots, \beta_{B_S}(x)) , \text{ где } \beta_{B_i}(x) \equiv \alpha_i^{l_B}(x) \pmod{p_i(x)} , i = \overline{1, S} .$$

Все операции возведения в степень вычисляются в непозиционной полиномиальной системе счисления, поэтому эти вычисления операций могут выполняться параллельно по модулям полиномов, выбранных в качестве оснований системы.

4. После этого стороны A и B обмениваются вычисленными значениями открытых ключей соответственно

$$K_A(x) = (P_S(x), \alpha(x), \beta_A(x)) , \quad K_B(x) = (P_S(x), \alpha(x), \beta_B(x))$$

в двоичном представлении по незащищенному каналу.

5. Используя открытые ключи адресата пользователи A и B выполняют процесс шифрования сообщения M в виде (4) по аналогии с традиционной схемой Эль-Гамала в соответствии с алгоритмом зашифрования E_k :

$$E_k(M) = (C_1, C_2) , \text{ где } C_1 = \alpha^r \pmod{P_S(x)} , \quad C_2 = M \cdot \beta^r \pmod{P_S(x)} ,$$

где r – случайно выбираемое число (рандомизатор) и $0 \leq r \leq 2^m$.

6. Для расшифрования зашифрованного сообщения в соответствии с алгоритмом расшифрования D_k пользователи A и B используют свои личные ключи:

$$D_k(C_1, C_2) = C_2 \cdot (C_1^{l_i})^{-1} \pmod{P_S(x)} = M , \text{ где } i = A, B .$$

Все вычисления в НПСС производятся параллельно по модулям рабочих оснований $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$, вследствие этого существенно возрастает скорость выполнения операций.

Рассмотрим пример. Пусть пользователь A вычисляет открытый ключ и публикует его для того, чтобы пользователь B мог писать ему сообщения. Затем пользователь A выполняет следующие действия.

1. Формирует НПСС: ее основаниями выбираются неприводимые многочлены: $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x^4 + x^3 + 1$ и $p_3(x) = x^4 + x + 1$.

2. Для каждого основания $p_1(x), p_2(x), \dots, p_3(x)$ выбирает соответственно примитивный элемент (многочлен) $\alpha_1(x) = x^2 + x$, $\alpha_2(x) = x^2$, $\alpha_3(x) = x^3 + x + 1$. Выбранные рабочие основания и соответствующие им примитивные многочлены держатся в секрете.

3. Затем выбирает личный (закрытый) ключ $l_A = 3$ так, что $l < l_A < 2^m$.

4. Вычисляет третий элемент открытого ключа: $\beta_A(x) = (\beta_{A_1}(x), \beta_{A_2}(x), \beta_{A_3}(x))$, где

$$\beta_{A_1}(x) \equiv \alpha_1^{l_{A_1}}(x) \pmod{p_1(x)} = (x^2 + x)^3 \pmod{(x^3 + x + 1)} = x^2 + x + 1;$$

$$\beta_{A_2}(x) \equiv \alpha_2^{l_{A_2}}(x) \pmod{p_2(x)} = (x^2)^3 \pmod{(x^4 + x^3 + 1)} = x^3 + x^2 + x + 1;$$

$$\beta_{A_3}(x) \equiv \alpha_3^{l_{A_3}}(x) \pmod{p_3(x)} = (x^3 + x + 1)^3 \pmod{(x^4 + x + 1)} = x^3 + x^2.$$

5. После этого A публикует значения открытых ключей соответственно:

$$K_A(x) = \{ (p_1(x), p_2(x), p_3(x)); (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)); (\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x))) \}.$$

Так как порядок и значения рабочих оснований $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ и примитивные $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$ оговариваются между пользователями заранее, по незащищенному каналу передается только общий вид $P(x)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в двоичном представлении.

Используя открытые ключи адресата A , пользователь B выполняет процесс зашифрования сообщения $M = \{10010110100\}$, которое представляется в виде последовательности вычетов по рабочим основаниям:

$$M_1 = \{100\} = x^2, M_2 = \{1011\} = x^3 + x + 1, M_3 = \{0100\} = x^2.$$

6. Пользователь B выбирает случайные числа $r_1 = 4$, $r_2 = 4$ и $r_3 = 9$, где $0 \leq r \leq 2^{11}$. Сообщение шифруется следующим образом:

$$C_{1A_1} = \alpha_1^{r_1}(x) = x + 1, C_{1A_2} = \alpha_2^{r_2}(x) = x^3 + x^2 + x, C_{1A_3} = \alpha_3^{r_3}(x) = x^2 + x + 1,$$

$$C_{2A_1} = M_1 \cdot \beta_1^{r_1}(x) = x, C_{2A_2} = M_2 \cdot \beta_2^{r_2}(x) = x^3 + x^2, C_{2A_3} = M_3 \cdot \beta_3^{r_3}(x) = x^3 + x^2 + x.$$

Тогда зашифрованный текст выглядит так:

$$C_{1A} = \{x + 1, x^3 + x^2 + x, x^2 + x + 1\} = \{011, 1110, 0111\},$$

$$C_{2A} = \{x, x^3 + x^2, x^3 + x^2 + x\} = \{010, 1100, 1110\}.$$

7. Для расшифрования зашифрованного сообщения пользователь A использует свои личные ключи:

$$(C_{1A_1}^{l_{A_1}})^{-1} = (x + 1)^{-1} \pmod{p_1(x)} = x, (C_{1A_2}^{l_{A_2}})^{-1} = (x^2 + 1)^{-1} \pmod{p_2(x)} = x^3 + x^2 + x + 1,$$

$$(C_{1A_3}^{l_{A_3}})^{-1} = (x^3 + x)^{-1} \pmod{p_3(x)} = x^3 + x^2 \text{ и } M_1 = C_{2A_1} \cdot (C_{1A_1}^{l_{A_1}})^{-1} = (x \cdot x) \pmod{p_1(x)} = x^2,$$

$$M_2 = C_{2A_2} \cdot (C_{1A_2}^{l_{A_2}})^{-1} = (x^3 + x^2)(x^3 + x^2 + x + 1) \pmod{p_2(x)} = x^3 + x + 1,$$

$$M_3 = C_{2A_3} \cdot (C_{1A_3}^{l_{A_3}})^{-1} = (x^3 + x^2 + x)(x^3 + x^2) \pmod{p_3(x)} = x^2.$$

Таким образом, зашифрованное сообщение имеет вид:

$$M = \{M_1, M_2, M_3\} = \{x^2, x^3 + x + 1, x^2\} = \{10010110100\}.$$

Надежность предлагаемого алгоритма повышается за счет выбора оснований НПСС и примитивных элементов. Другое достоинство – сокращение времени выполнения операций возведения в степень за счет распараллеливания по модулям оснований НПСС. Криптостойкость алгоритма характеризуется выбором оснований НПСС и соответствующих им примитивных многочленов, базисов НПСС, личных ключей пользователей.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бияшев Р.Г. Разработка и исследование методов сквозного повышения достоверности в системах обмена данными распределенных АСУ: Дис. ... докт. тех. наук. – М., 1985. – 328 с.
- 2 Капалова Н.А., Нысанбаева С.Е. Исследование нетрадиционного алгоритма открытого распределения ключей // Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании: Третья Межд. науч.-практ. конф. – Ч. III. – г. Ставрополь, Северо-Кавказ. гос. техн. ун-т, 1-5 мая 2008. – С. 217-222.
- 3 Нысанбаева С.Е. Система электронной цифровой подписи с открытым ключом на базе модулярной арифметики // Математический журнал. – 2011. – № 2. – С. 58-63.

4 Капалова Н.А. Алгоритм шифрования на базе непозиционных полиномиальных систем счисления с использованием системы Эль-Гамала // Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании: Пятая Межд. науч.-практ. конф. – Ч. II. – г. Ставрополь, Северо-Кавказ. гос. техн. ун-т, 2-6 мая 2012. – С. 225-227.

REFERENCES

- 1 Biiashev R.G. Razrabotka i issledovanie metodov skvoznogo povysheniia dostovernosti v sistemakh obmena dannymi raspredelennykh ASU: Dis. ... dokt. tekhn. nauk. – M., 1985. – 328 s. (in Russ.)
- 2 Kapalova N.A., Nysanbaeva S.E. Issledovanie netraditsionnogo algoritma otkrytogo raspredeleniia kluchei // Infokommunikatsionnye tekhnologii v nauke, proizvodstve i obrazovanii: Tret'ia Mezhd. nauch. prakt. konf. Ch. III. g. Stavropol', Severo Kavkaz. gos. tekhn. un t, 1-5 maia 2008. – S. 217-222. (in Russ.)
- 3 Nysanbaeva S.E. Sistema elektronnoi tsifrovoi podpisii s otkrytym kluchom na baze moduliarnoi arifmetiki // Matematicheskii zhurnal. – 2011. – № 2. – S. 58-63. (in Russ.)
- 4 Kapalova N.A. Algoritm shifrovaniia na baze nepozitsionnykh polinomial'nykh sistem schisleniia s ispol'zovaniem sistemy El'-Gamalia // Infokommunikatsionnye tekhnologii v nauke, proizvodstve i obrazovanii: Piataia Mezhd. nauch.-prakt. konf. Ch. II. g. Stavropol', Severo-Kavkaz. gos. tekhn. un-t, 2-6 maia 2012. – S. 225-227. (in Russ.)

Резюме

Н. А. Капалова

(Информатика және басқару проблемалары институты, Алматы қ.)

ПОЗИЦИЈАЛЫ ЕМЕС ПОЛИНОМДЫ САНАУ ЖҮЙЕСІ НЕГІЗІНДЕ ЭЛЬ-ГАМАЛЬ ШИФРЛАУ АЛГОРИТМІНІҢ МОДИФИКАЦИЯСЫ

Позициялы емес полиномды санау жүйесі (ППСЖ) негізінде Эль-Гамаль асимметриялық шифрлау сызбасын модификациялау нәтижелері келтірілген. Дәстүрлі емес кодтау, шифрлау, электрондық сандық қолтаңбаларды құру және криптографиялық кілттерді тарату алгоритмдері мен әдістерін құру мен зерттеуде ППСЖ қолдану, осы криптографиялық шаралардың тұрақтылығы мен тиімділігін мейлінше арттырады. Эль-Гамаль сызбасын шифрлеуге, сондай-ақ электрондық сандық қолтаңбаларды құру үшін де қолдануға болады, оның тұрақтылығы ақырлы сақинаның мультипликативті тобында дискретті логарифмдеу мәселесінің қиындығына негізделген. Оны АҚШ пен Ресей электрондық сандық қолтаңба стандарттарының негізі ретінде алған. Ұсынылып отырған алгоритмнің тұрақтылығы ППСЖ негіздері мен қарапайым элементтерін таңдау есебінен өседі. ППСЖ барлық есептеулер жұмысшы негіздерінің модулдері бойынша параллельді түрде орындалады, сондықтан амалдарды орындау уақыты қысқарады.

Кілт сөздер: модификация, алгоритм, шифрлау, есептеу жүйелері, Эль-Гамаль, сандық жазу.

Summary

N. A. Kapalova

(Institute for problems of informatics and control, Almaty)

THE MODIFIED ALGORITHM OF ENCRYPTION EL GAMAL ON THE BASIS OF NOT POSITIONAL POLYNOMIAL NOTATIONS

This paper presents the results of modification of the system of asymmetric encryption scheme El Gamal based on not positional polynomial notations (NPPN) are and the control example is reduced. Using the NPPN in the development and research of innovative algorithms and methods for encoding, encryption and digital signature formation and distribution of cryptographic keys can significantly increase the reliability and effectiveness of these cryptographic procedures. El Gamal scheme can be used for digital signatures and encryption, cryptographic security scheme based on the complexity of the discrete logarithm problem in the multiplicative group of a finite field. It is the basis of standards of digital signature in the U.S. (DSA) and Russia. The reliability of the proposed algorithm is improved by selecting the grounds NPPN and primitive elements. All calculations are done in parallel to the NPPN on modules operating bases, due to this reduced running times.

Keywords: modification of the algorithm, encryption, number systems, El Gamal digital signature.

Поступила 1.02.1213г.

З. К. КУРАЛБАЕВ, А. А. ЕРЖАН

(Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ПЕРЕХОДНОМ ПРОЦЕССЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Аннотация

В радиотехнических системах часто возникают задачи о переходных процессах в электрических цепях, решение которых имеет важное теоретическое и практическое значение. Данная статья посвящена решению одной из таких задач. Рассмотрен частный случай задачи и получено аналитическое решение.

Ключевые слова: радиотехнические системы, переходный процесс, электрическая цепь, теория цепей.

Клт сздер: радиотехникалық жүйелер, өтпелі үдеріс, электр тізбегі, тізбектер теориясы.

Keywords: radio systems, the transition process, the electrical circuit, circuit theory.

Введение. Анализ схемы, цель которого состоит в получении реакции схемы на возбуждение известным сигналом, является одной из важных задач в теории цепей [1]. В общем случае, когда изучается поведение любой динамической системы в любой промежуток времени должна рассматриваться задача о переходном процессе. В данном случае в качестве динамической системы рассматривается электронная схема, подключенная в некоторый момент к источнику тока или напряжения [2]. Подобную задачу приходится решать часто в радиотехнических системах [1].

В работе [3] была рассмотрена задача о переходном процессе, происходящем в электрической цепи под воздействием возбуждающего источника тока, имеющего синусоидальный закон изменения. В качестве примера использована простая RC-схема. С целью обобщения этой задачи для общего случая в данной статье рассматривается решение одной задачи о переходных процессах известным классическим методом.

Известно, «... что переходные процессы во многих устройствах и системах связи являются составной «нормальной» частью режима их работы» [1]. Любые изменения в электрической цепи являются причиной возникновения переходных процессов, так как установившийся режим в цепи не достигается мгновенно. Изучение переходных процессов в цепи является одной из важных проблем в связи с тем, что переходные процессы могут привести к известным нежелательным явлениям [1].

Существуют различные методы анализа переходных процессов в электрической цепи [1, 2]. Для анализа удобным является классический метод расчета переходных процессов. Этот метод использует математическую модель переходного процесса, которая приводит к постановке задачи Коши для дифференциальных уравнений. В данной статье рассматривается решение одной задачи о переходных процессах в электрической цепи классическим методом.

Постановка задачи. Пусть рассматривается следующая RC-схема (рисунок 1). Математическая модель данной цепи описана с помощью следующих дифференциальных уравнений [3]:

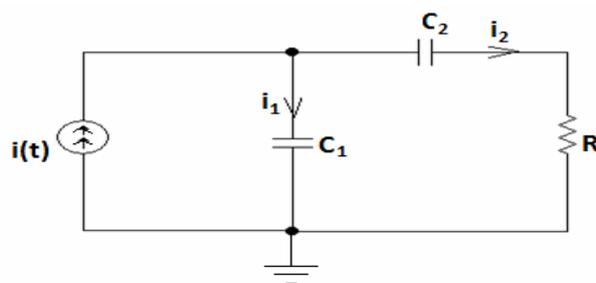


Рисунок 1 – Линейная RC-цепь

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{u_2 - u_1}{RC_1} + \frac{i(t)}{C_1}; \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{u_1 - u_2}{RC_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где R – сопротивление резистора; C_1 и C_2 – емкости конденсаторов; $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – напряжения на конденсаторах; $i(t)$ – ток на источнике; t – время.

Величины C_1 , C_2 и R в формулах (1) являются постоянными величинами, не зависящими от времени t . Функция $i(t)$ задана в $t \in [0, \infty)$ и удовлетворяет условиям Дирихле [4], а функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ являются искомыми функциями.

По второму закону коммутации [1] в начальный момент времени $t=0$ напряжения на емкостях имеют те же значения, что и в момент $t=0$ до коммутации. Этот факт позволяет задавать начальные условия в момент $t=0$ для решения дифференциальных уравнений (1):

$$t = 0; \quad u_1(0) = 0; \quad u_2(0) = 0. \quad (2)$$

Теперь может быть сформулирована математическая задача, в которой требуется решить систему дифференциальных уравнений первого порядка (1) при начальных условиях (2). Она является задачей Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Аналитическое решение задачи Коши (1)–(2) рассмотрено в работе [3]. Оно может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_2(t) + e^{-\alpha t} Z(t), \\ u_2(t) &= \frac{1}{\tau_2} \int_0^t e^{-\alpha x} Z(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

В данных формулах введены следующие обозначения:

$$Z(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(x) e^{\alpha x} dx, \quad (4)$$

$$\tau_1 = RC_1, \quad \tau_2 = RC_2; \quad \alpha = \frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2};$$

В этих формулах τ_1 и τ_2 – постоянные величины; они называются постоянными временами конденсаторов.

Полученное решение (3) данной задачи зависит от функции $i(t)$. Здесь было сделано допущение о том, что функция $i(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле [3]. Тогда, согласно теореме Дирихле, она может быть разложена в ряд Фурье. Предполагается, что функция $i(t)$, определенная в промежутке $(0, T)$, а затем при остальных значениях t изменяется по закону периодичности с периодом T .

В данном случае функция $i(t)$ может быть представлена как сумма следующего ряда Фурье [4]:

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) \quad (5)$$

Коэффициенты ряда a_k и b_k определяются с помощью формул [4]:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \sin \frac{2k\pi t}{T} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$.

В дальнейших вычислениях потребуются значения интегралов, получаемых после подстановки формулы (5) в формулу (4):

$$Z(t) = \frac{1}{C_1} \cdot \left[Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \right], \quad (7)$$

где

$$\begin{cases} Q_0 = \frac{a_0}{2} \cdot \int_0^t \exp(\alpha x) dx = \frac{a_0}{2\alpha} [\exp(\alpha t) - 1], \\ Q_k = a_k \cdot \int_0^t \exp(\alpha x) \cdot \cos \frac{2k\pi x}{T} dx, \\ G_k = b_k \cdot \int_0^t \exp(\alpha x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{T} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Вычисление интегралов (8) не представляет особых трудностей, и они могут быть представлены в виде следующих формул:

$$\begin{aligned} Q_k &= a_k \cdot \frac{T^2 \cdot \alpha}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \cdot \left[\frac{2k\pi \cdot \exp(\alpha t)}{\alpha \cdot T} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) - 1 + \exp(\alpha t) \cdot \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right] \\ G_k &= b_k \cdot \frac{T^2 \cdot \alpha}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \cdot \left[\exp(\alpha t) \cdot \sin \frac{2k\pi t}{T} + \frac{2k\pi}{\alpha \cdot T} \cdot (1 - \exp(\alpha t)) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Теперь можно определить искомые функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Для этого необходимо вначале вычислить интеграл, используя вторую формулу (3):

$$u_2(t) = \frac{1}{\tau_2 \cdot C_1} \cdot \int_0^t \exp(-\alpha x) [Q_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (Q_k + G_k)] dx \quad (10)$$

Подставив формулы (9) в (10), а затем вычислив интегралы, можно получить искомую функцию $u_2(t)$:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \left\{ \frac{a_0}{2\alpha} \left[t + \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) - \frac{1}{\alpha} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha T^2}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \left[\left(\frac{a_k}{\alpha} + \frac{Tb_k}{2k\pi} \right) (1 - \cos \frac{2k\pi t}{T}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{Ta_k}{2k\pi} - \frac{b_k}{\alpha} \right) \sin \frac{2k\pi t}{T} + \left(\frac{a_k}{\alpha} - \frac{2k\pi}{T\alpha^2} b_k \right) (\exp(-\alpha t) - 1) \right] \right\} \cdot \frac{1}{\tau_2 C_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $u_1(t)$ определяется по первой формуле (3):

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_2(t) + \left\{ \frac{a_0}{2\alpha} \cdot (1 - \exp(-\alpha t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2 \alpha}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \cdot \left[\left(\frac{2k\pi}{\alpha T} \cdot a_k + b_k \right) \cdot \right. \right. \\ &\left. \left. \cdot \sin \frac{2k\pi t}{T} + \left(a_k - \frac{2k\pi}{\alpha T} \cdot b_k \right) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + \exp(-\alpha t) \cdot \left(\frac{2k\pi}{\alpha T} \cdot b_k - a_k \right) \right] \right\} \cdot \frac{1}{C_1} \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, решена поставленная математическая задача (1) и (2) и найдены формулы (11) и (12) для определения искомых функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в зависимости от функции $i(t)$. Теперь требуется определить функции $i_1(t)$ и $i_2(t)$, которые описывают изменение токов в цепи в зависимости от времени t . Для определения их используются следующие известные формулы [1, 2]:

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_2}{dt}; \quad i_1(t) = i(t) - i_2(t). \quad (13)$$

Определив первую производную функции $u_2(t)$ из формулы (11) и подставляя ее в первую формулу (13), можно получить формулу для определения функции $i_2(t)$:

$$i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \cdot \left\{ \frac{a_0}{2\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2 \alpha}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \cdot \left[\left(\frac{2k\pi}{T\alpha} a_k + b_k \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \frac{2k\pi}{T} t + \left(a_k - \frac{2k\pi}{T\alpha} b_k \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{T} t - \exp(-\alpha t) \right) \right] \right\}. \quad (14)$$

Функция $i_1(t)$ определяется из второй формулы (13).

Частный случай. Пусть теперь предполагается, что $i(t)$ является сигналом, поступающим в цепь и является причиной переходного процесса.

В литературе, посвященной анализу и расчету электрических цепей [1, 2], приведены различные типы наиболее распространенных на практике сигналов. В данной статье рассматривается частный случай поставленной в ней задачи, когда сигнал $i(t)$ задан в виде периодической формы (рисунок 2).

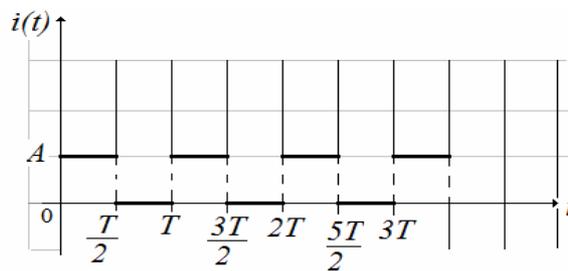


Рисунок 2 – Сигнал периодической формы

Формула, определяющая сигнал, приведенный на рисунке 2, записывается в следующем виде:

$$i(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases} \quad (15)$$

Разложение данной функции $i(t)$ в ряд Фурье

$$i(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{T} t}{1} + \frac{\sin \frac{6\pi}{T} t}{3} + \frac{\sin \frac{10\pi}{T} t}{5} + \dots \right), \quad (16)$$

Коэффициенты этого ряда определены из формул (6):

$$a_0 = A; \quad a_k = 0; \quad b_k = \frac{A}{k\pi} [1 - (-1)^k];$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

В этом частном случае искомые функции будут определены:

$$u_2(t) = \frac{1}{\tau_2 C_1} \cdot \left\{ \frac{A}{2\alpha} \left(t + \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k [(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[1 - \cos \frac{2k\pi}{T} t - \frac{1}{\alpha} \sin \frac{2k\pi}{T} t + \frac{2k\pi}{\alpha^2 T} \cdot (1 - \exp(-\alpha t)) \right] \right\}, \\ u_1(t) = u_2(t) + \frac{1}{C_1} \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k [(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin \frac{2k\pi}{T} t - \frac{2k\pi}{\alpha T} \left(\cos \frac{2k\pi}{T} t - \exp(-\alpha t) \right) \right] \right\};$$

$$i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \cdot \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \cdot \left[\sin \frac{2k\pi t}{T} - \frac{2k\pi}{T\alpha} (\cos \frac{2k\pi t}{T} - \exp(-\alpha t)) \right] \right\}$$

$$i_1(t) = i(t) - i_2(t);$$

Для определения установившегося режима необходимо определить значения $i_2(t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) &= \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \cdot \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \cdot \left[\left(\sin \frac{2k\pi t}{T} - \frac{2k\pi}{T\alpha} \cos \frac{2k\pi t}{T} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \cdot \left\{ \frac{A}{2\alpha} + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] \sqrt{1 + \left(\frac{2k\pi}{\alpha T}\right)^2}}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k\right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\varphi_k = \arctg \frac{2k\pi}{T\alpha}$;

В установившемся режиме ток $i_2(t) = i_2^0(t)$:

$$\begin{aligned} i_2^0(t) &= \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \left[\frac{A}{2\alpha} + \frac{AT}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] \cdot \sin\left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k\right)}{k \sqrt{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2}} \right] \\ i_1^0(t) &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \right) + \frac{A}{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \sin \frac{2k\pi t}{T} - \frac{\sin\left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k\right)}{\sqrt{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2}} \right) \cdot \frac{[1 - (-1)^k]}{k} \right] \end{aligned}$$

Итак, получены аналитические формулы для искомых величин напряжений и токов в цепи.

Выводы:

1. Поставлена и решена математическая задача о переходном процессе в электрической RC-цепи. Аналитическое решение задачи получено в виде рядов Фурье.
2. Рассмотрен частный случай, когда возбуждающий ток является сигналом периодической формы с заданным периодом T .
3. Дано теоретическое определение установившегося режима рассматриваемой в электрической цепи; получены формулы для искомых функций $i_1^0(t)$ и $i_2^0(t)$ в установившемся режиме.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Под ред. В. П. Бакалова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.
- 2 Фидлер Дж.К., Найтингейл К. Машинное проектирование электронных схем / Пер. с англ. под ред. Г. Г. Казеннова. – М.: Высш. шк., 1985. – 216 с.
- 3 Куралбаев З.К., Ержан А.А. Анализ непрерывного процесса в линейной электронной цепи // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. – 2012. – № 6. – С. 183-188.
- 4 Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 656 с.

REFERENCES

- 1 Bakalov V.P., Dmitrikov V.F., Kruk B.E. Radio i svjaz, **2000**, 592 (in Russ.).
- 2 Computer aided circuit design / J. K. Fidler, C. Nightingate. **1985**, 216 (in Russ.).
- 3 Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A. Vestnik ENU im. L.N. Gumilyeva. – **2012**, № 6. 183-188 (in Russ.).
- 4 Smirnov V.I. T.2. Nauka, **1974**, 656 (in Russ.).

Резюме

З. К. Құралбаев, А. А. Ержан

(Алматы энергетика және байланыс университеті)

ЭЛЕКТРЛІК ТІЗБЕКТЕГІ ӨТПЕЛІ ҮДЕРІС ТУРАЛЫ БІР ЕСЕПТІ ШЕШУ

Электрлік тізбектердегі өтпелі үдерістер туралы есептер радиотехникалық жүйелерде жиі кездеседі. Оларды шешудің теориялық және практикалық маңызы өзекті. Ұсынылып отырған мақала осы есептердің бірін шешуге арналған. Есептің жеке жағдайы қарастырылып, талдау шешімі анықталған.

Кілт сөздер: радиотехникалық жүйелер, өтпелі үдеріс, электр тізбегі, тізбектер теориясы.

Summary

Z. K. Kuralbayev, A. A. Yerzhan

(Almaty University of Power Engineering & Telecommunications)

ON THE SOLUTION OF A PROBLEM OF THE TRANSITION PROCESS IN THE ELECTRICAL CIRCUIT

In radio engineering systems often arises the problem of transients in electrical circuits, the solution of which has important theoretical and practical significance. This article is devoted to the solution of one of these problems. A special case of the problem is considered and the analytical solution is obtained.

Keywords: radio systems, the transition process, the electrical circuit, circuit theory.

Поступила 7.02.2013г.

Н. И. МАРТЫНОВ, М. А. РАМАЗАНОВА, А. А. ЧУПРАСОВ

(Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова, г. Алматы)

СВОБОДНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Аннотация

С помощью метода усреднения получены аналитические выражения для угловых координат сейсмического крутильного маятника при свободных нелинейных колебаниях. Анализ этих выражений и проведенное компьютерное моделирование позволили установить закономерности и особенности свободных колебаний сейсмического маятника.

Ключевые слова: нелинейные колебания, угловые координаты, маятник, компьютерное моделирование, землетрясение, прогноз.

Кілт сөздер: бейсызык тербелістер, бұрыштық координаттар, маятник, компьютерлік үлгілеу, жерсілкінісі, болжам.

Keywords: nonlinear vibration, angular coordinates, the pendulum, computer modeling, earthquake prediction.

Введение. Проблема прогноза землетрясений является одной из сложных и пока неразрешенных проблем, стоящих перед человечеством. Если долгосрочный прогноз землетрясений, основанный на геолого-геофизических и сейсмологических наблюдениях, дает более или менее удовлетворительные результаты [1, 2], то надежность среднесрочного прогноза по комплексу предвестников существенно ниже 0.5 и в редких случаях приближается к 0.5. Несмотря на огромное количество предвестников, ни один из них не дает точных оценок. В разных сейсмоактивных районах различные предвестники работают по-разному, давая большой разброс прогнозируемых параметров будущего землетрясения. Это связано как со сложностью исследования очага землетрясения, условий его зарождения и развития, так и с существенным влиянием помехообразующих факторов [3]. Ситуация с краткосрочным и оперативным прогнозом еще хуже: практически отсутствуют оценки надежности прогнозных предвестников.

С целью краткосрочного и оперативного прогноза землетрясений был разработан сейсмический маятник крутильного типа [4]. Наиболее глубокое исследование в этой области дано в работах группы Калининкова И. И. [4-8]. На основе качественной физической модели с оценкой некоторых параметров колебаний маятника и сейсмических воздействий, с привлечением статистических методов, Калининковым И. И. и другими сотрудниками Института Физики Земли была разработана методика оперативного прогноза землетрясений [5-9].

После Спитакского землетрясения 1988г., по предложению председателя Совета Министров СССР Н. И. Рыжкова и Первого Президента Республики Казахстана Н. А. Назарбаева в течение 1989-1993гг. на территории Казахстана была создана сеть станций из 9 полигонов наблюдения за сейсмической ситуацией на юго-востоке республики. Каждый полигон оснащен прибором «Алем», состоящим из двух крутильных маятников и других приборов, работающих в режиме реального времени. Опыт эксплуатации сети позволил собрать уникальный материал о готовящихся землетрясениях и показал, что прогнозные признаки могут проявляться от нескольких часов до нескольких суток перед землетрясением. Прогнозные признаки с надежностью не менее 70% выражаются в регулярных, как правило, ежедневных отклонениях показаний приборов от своего установившегося уровня, либо в пикообразном, либо в бухтообразном изменении углов закручивания маятника [10, 11].

Несмотря на определенные успехи в понимании связи поведения крутильного маятника с сейсмической обстановкой, установить какие-либо количественные соотношения не удавалось и, в первую очередь, из-за отсутствия достаточно строгой теории. Следует отметить, что существенный прогресс в компьютерных технологиях и численных методах не позволяет "перебрать" все варианты численного решения, а значит полно оценить влияние всех параметров колебания

маятника и глубоко изучить природу явления. На эти вопросы в определенной мере способна ответить количественная теория, базирующаяся на приближенном аналитическом решении.

Такая аналитическая теория начала разрабатываться в Казахстане с конца 2003 года. Она позволила заложить основы теории колебаний сейсмического маятника [12]. С использованием метода усреднения были получены аналитические выражения для расчета всех угловых характеристик сейсмического маятника. Собственные затухающие нелинейные колебания, а также вынужденные нелинейные колебания маятника описаны в квадратурах. Соответствующие теоремы методов усреднения гарантируют близость точных и приближенных аналитических решений на достаточно большом отрезке времени [13-15]. Полученные результаты качественно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Тем не менее основы аналитической теории [12, 16] нуждаются в существенной переработке и выполнении расчетной части.

Ниже кратко приводится вывод основных расчетных характеристик и параметров свободных нелинейных колебаний. Проведено соответствующее компьютерное моделирование. Установлены закономерности и особенности свободных колебаний сейсмического маятника.

Свободные колебания. Колебания сейсмического маятника описываются тремя степенями свободы (ψ , θ , φ) в модифицированной эйлеровой системе координат, где ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного закручивания [12, 16]. Там же выделен малый параметр μ , который представляет собой отношение частот линейных крутильных и нутационных колебаний. Для реального сейсмического маятника на станции "Медео" $\mu = 0.0076$. В целях упрощения исследования вводятся обобщенные угловые координаты (q_1 , q_2 , q_3) и соответствующие им обобщенные импульсы (P_1 , P_2 , P_3).

$$\psi = F_1(q_1, q_2, q_3) = \arcsin\left(\frac{q_1\sqrt{1-\frac{q_1^2}{4}}}{Z_0}\cos q_3\right), \quad \theta = F_2(q_1, q_2, q_3) = \arcsin\left(q_1\sqrt{1-\frac{q_1^2}{4}}\sin q_3\right), \quad (1)$$

$$\varphi = F_3(q_1, q_2, q_3) = q_2 + \arcsin\left(\frac{q_1^2\sin(2q_3)}{4Z_0}\right), \quad \cos\theta = \sqrt{\cos^2 q_3 + \left(1 - \frac{q_1^2}{2}\right)^2 \sin^2 q_3} = Z_0$$

Рассмотрим свободные колебания высокочастотного модельного сейсмического маятника, когда силами трения можно пренебречь. Такое движение маятника в безразмерных переменных описывается системой уравнений [12, 16]:

$$\dot{q}_1 = \left(1 - \frac{\mu^2 q_1^2}{4}\right)P_1, \quad \dot{q}_2 = \frac{P_2}{a} - \frac{\mu}{2}P_3, \quad \dot{q}_3 = \frac{\mu^2}{4}(P_3 - 2P_2) + \frac{P_3}{q_1^2} \quad (2)$$

$$\dot{P}_1 + q_1 - \frac{P_3^2}{4q_1^3} = \frac{\mu^2 q_1}{4}P_1^2, \quad \dot{P}_2 + \mu^2 a q_2 = 0, \quad \dot{P}_3 = 0. \quad (3)$$

где a – расстояние от центра тяжести маятника до центра крепления галтели.

Из систем уравнений (2), (3) следует:

$$P_1 = \frac{\dot{q}_1}{\left(1 - \frac{\mu^2 q_1^2}{4}\right)}, \quad P_2 = a\left(\dot{q}_2 + \frac{\mu}{2}P_3\right), \quad P_3 = P_0 = const. \quad (4)$$

$$\ddot{q}_1 + q_1 - \frac{P_0^2}{q_1^3} = \frac{\mu^2}{4}\left(q_1^3 - q_1\dot{q}_1^2 - \frac{P_0^2}{q_1}\right), \quad \ddot{q}_2 + \mu^2 q_2 = 0, \quad (5)$$

Под линейно поляризованными понимаются такие колебания маятника, когда его нить остается в фиксированной плоскости. В этом случае порождающее решение (5) имеет вид [16, 20]:

$$q_1 = A_1 \cos(t + e_1), \quad q_2 = A_2 \cos(\mu t + e_2), \quad P_0 \equiv 0, \quad (6)$$

где амплитуды A_1 , A_2 и начальные фазы e_1 , e_2 определяются начальными условиями.

Рассмотрим общий случай незатухающих колебаний, когда $P_3 = P_0 \neq 0$. В этом случае q_1 никогда не обращается в нуль и порождающее решение имеет вид [16, 20]:

$$q_1 = \sqrt{c + \Delta \cos \psi}, \quad \Delta = \sqrt{c^2 - P_0^2}, \quad c = \text{const}, \quad q_2 = A_2 \cos(\mu t + e_2), \quad P_3 = P_0 \neq 0 \quad (7)$$

Приведём первое уравнение (5) к стандартной форме. Его решение ищем методом вариации произвольных постоянных в виде:

$$q_1 = \sqrt{\alpha + \Delta \cos \psi}, \quad \Delta = \sqrt{\alpha^2 - P_0^2}, \quad \dot{q}_1 = -\frac{\Delta \sin \psi}{q_1}, \quad \psi = 2t - 2\beta, \quad (8)$$

где α, β – неизвестные функции. Вид зависимостей (8) предполагает, что α и β связаны между собой определённым соотношением. Дифференцируя первое соотношение (8) и учитывая второе соотношение (8), получим:

$$\dot{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \cos \psi}{\Delta} + 2\Delta \beta'_\alpha \sin \psi \right) = 0, \quad (9)$$

отсюда

$$\beta'_\alpha = -\frac{(\Delta + \alpha \cos \psi)}{2\Delta^2 \sin \psi}. \quad (10)$$

Дифференцирование второго соотношения (8) с учётом (10) даёт:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2q_1^3} \left\{ \frac{\dot{\alpha} q_1^4}{\Delta \sin \psi} + 2q_1^2 \Delta \cos \psi + \Delta^2 \sin^2 \psi \right\}. \quad (11)$$

Подставим (8), (10) в первое уравнение (5), после несложных преобразований получим:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mu^2 \Delta^2 \sin 2\psi}{4}. \quad (12)$$

Тогда $\dot{\beta}$ с учётом (10) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\beta} = \frac{\mu^2}{4} \cos \psi (\Delta + \alpha \Delta \cos \psi). \quad (13)$$

Таким образом, первое уравнение (5) заменено эквивалентной системой уравнений (12), (13), записанной в стандартной форме. Если перейти к фазе колебаний с помощью последнего соотношения (8), то система (12), (13) запишется в виде:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mu^2 \Delta^2 \sin 2\psi}{4}, \quad \dot{\psi} = 2 - \frac{\mu^2}{2} \cos \psi (\Delta + \alpha \cos \psi). \quad (14)$$

Решение системы уравнений (14) с помощью метода усреднения ищем в виде

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + \mu^2 u_1(\bar{A}, \bar{\psi}) + \mu^4 u_2(\bar{A}, \bar{\psi}) + \dots, \\ \psi &= \bar{\psi} + \mu^2 v_1(\bar{A}, \bar{\psi}) + \mu^4 v_2(\bar{A}, \bar{\psi}) + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

которая преобразует систему (14) в систему сравнения (16) :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= \mu^2 S_1(\bar{A}) + \mu^4 S_2(\bar{A}) + \dots, \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} &= 2 + \mu^2 G_1(\bar{A}) + \mu^4 G_2(\bar{A}) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\bar{A}, \bar{\psi}$ – неизвестные средние значения A, ψ ; знак "—" означает среднее значение, функции $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, S_1, S_2, \dots, G_1, G_2, \dots$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Суть метода усреднения состоит в том, что первое уравнение (5) или эквивалентная ему система (14) с помощью определенной процедуры замены переменных представляется более простой системой уравнений, которая поддаётся решению или более глубокому анализу. При этом решения (14) и (16) должны отличаться между собой на сколь угодно малую величину на достаточно большом отрезке времени. Ограничимся первым приближением, которое в данном случае совпадает со

вторым. В виду аналитичности правой части первого уравнения (5) и построенное решение (16) в абсолютной норме будут отличаться между собой на величину, не более чем $O(\mu^2)$ на отрезке времени L/μ^2 , где L может быть достаточно большим числом [14].

Если произвести все необходимые операции метода усреднения, то в первом приближении (совпадающем со вторым приближением) получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{1}{2} \left\{ S_1(\bar{\alpha}) + \frac{\bar{\Delta}^2}{4} \sin 2\bar{\psi} \right\}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{1}{2} \left\{ G_1(\bar{\alpha}) + \frac{\Delta}{2} \cos \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} (1 + \cos 2\bar{\psi}) \right\}, \quad (17)$$

где $\bar{\Delta} = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - P_0^2}$, а усреднённая фаза $\bar{\psi}$ удовлетворяет второму уравнению (16). Выполняя процедуру усреднения, определяем $S_1(\bar{\alpha})$, $G_1(\bar{\alpha})$:

$$S_1(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\Delta}^2}{4} \sin 2\bar{\psi} d\bar{\psi} = 0, \quad G_1(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\bar{\Delta}}{2} \cos \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} (1 + \cos 2\bar{\psi}) \right\} d\bar{\psi} = -\frac{\bar{\alpha}}{4}. \quad (18)$$

При выполнении процедуры усреднения по времени $\bar{\alpha}$, P_0 , $\bar{\Delta}$ считаются постоянными [14]. Подставив (18) в (17) и выполняя интегрирование, имеем:

$$u_1(\bar{\alpha}, \bar{\psi}) = \frac{\bar{\Delta}^2}{16} \cos 2\bar{\psi}, \quad v_1(\bar{\alpha}, \bar{\psi}) = -\frac{1}{4} \left\{ \bar{\Delta} \sin \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} \sin 2\bar{\psi} \right\}. \quad (19)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{\mu^2}{16} \bar{\Delta}^2 \cos 2\bar{\psi}, \quad \psi = \bar{\psi} - \frac{\mu^2}{4} \left\{ \bar{\Delta} \sin \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} \sin 2\bar{\psi} \right\}. \quad (20)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt} = 2 - \frac{\mu^2 \bar{\alpha}}{4}. \quad (21)$$

В соотношениях (19) при интегрировании (17) учтено, что $\varphi_1(\bar{\alpha}) = \psi_1(\bar{\alpha}) = 0$. Это условие обеспечивает тригонометрическую форму преобразования Крылова–Боголюбова (15). Из соотношений (21) следует, что

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 = const, \quad \bar{\psi} = \left(2 - \frac{\mu^2 \bar{\alpha}_0}{4} \right) t + \bar{\psi}_0. \quad (22)$$

Определим $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\psi}_0$:

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 + \frac{\mu^2}{16} \bar{\Delta}_0^2 \cos 2\bar{\psi}_0, \quad \psi_0 = \bar{\psi}_0 - \frac{\mu^2}{4} \left\{ \bar{\Delta}_0 \sin \bar{\psi}_0 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4} \sin 2\bar{\psi}_0 \right\}, \quad \bar{\Delta}_0 = \sqrt{\bar{\alpha}_0^2 - P_0^2}, \quad (23)$$

где начальные амплитуда α_0 и фаза ψ_0 определяются из начальных условий:

$$q_{10}^2 = \alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_0, \quad \dot{q}_{10} q_{10} = -\Delta_{00} \sin \psi_0, \quad \Delta_{00} = \sqrt{\alpha_0^2 - P_0^2}. \quad (24)$$

Представим $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\psi}_0$ в виде:

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_{01} + \mu^2 \bar{\alpha}_{02}, \quad \bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_{01} + \mu^2 \bar{\psi}_{02}. \quad (25)$$

Подставив (25) в (23) и разложив в ряд по малому параметру μ , приравняем коэффициенты при μ^0 , μ^2 . Получим систему четырёх линейных уравнений относительно $\bar{\alpha}_{01}$, $\bar{\alpha}_{02}$, $\bar{\psi}_{01}$, $\bar{\psi}_{02}$, решение которой будет:

$$\bar{\alpha}_{01} = \alpha_0, \quad \bar{\psi}_{01} = \psi_0, \quad \bar{\alpha}_{02} = -\frac{\Delta_{00}^2}{16} \cos 2\psi_0, \quad \bar{\psi}_{02} = \frac{1}{4} \left\{ \Delta_{00} \sin \psi_0 + \frac{\alpha_0}{4} \sin 2\psi_0 \right\}. \quad (26)$$

Тогда

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - \frac{\mu^2}{16} \Delta_{00}^2 \cos 2\psi_0, \quad \bar{\psi}_0 = \psi_0 + \frac{\mu^2}{4} \left\{ \Delta_{00} \sin \psi_0 + \frac{\alpha_0}{4} \sin 2\psi_0 \right\}. \quad (27)$$

Обозначим

$$\omega_{II} = 2 - \frac{\mu^2}{4} \left(\alpha_0 - \frac{\mu^2}{16} \Delta_{00}^2 \cos 2\psi_0 \right), \psi_{II} = \omega_{II} t + \psi_0. \quad (28)$$

Используя (20), (24), (27), (28) и пренебрегая членами четвертого порядка малости по μ , получим:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\mu^2}{16} \Delta_{00}^2 [\cos 2\psi_{II} - \cos 2\psi_0], \psi = \psi_{II} + \frac{\mu^2}{16} \{ 4\Delta_{00} (\sin \psi_0 - \sin \psi_{II}) + \alpha_0 (\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_{II}) \}. \quad (29)$$

Заметим, что при выводе (29) конструирование операторов сглаживания проведено с использованием операторов усреднения при постоянных возмущениях. Подобные операторы учитывают зависимость порождающего решения от времени и более эффективны, чем обыкновенные операторы сглаживания [14].

При $P_0 \neq 0$, используя (29) и (7), определим q_1 :

$$q_1^2 = (\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}) + \frac{\mu^2 \Delta_{00}}{16} \{ 2\Delta_{00} (\sin \psi_{II} - \sin \psi_0)^2 + \alpha_0 (\cos \psi_{II} - \cos(\psi_{II} - 2\psi_0)) \},$$

$$q_1 = \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}} + \frac{\mu^2 \Delta_{00} \{ 2\Delta_{00} (\sin \psi_{II} - \sin \psi_0)^2 + \alpha_0 (\cos \psi_{II} - \cos(\psi_{II} - 2\psi_0)) \}}{32 \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}}} \quad (30)$$

Заметим, что время отсчёта можно сдвинуть так, чтобы начальная фаза $\psi_0 \equiv 0$. Тогда выражения (30) упрощаются и равны:

$$q_1^2 = (\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}) + \frac{\mu^2 \Delta_{00}^2}{8} \sin^2 \psi_{II}, \quad \psi_{II} = \omega_{II} t,$$

$$q_1 = \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}} + \frac{\mu^2 \Delta_{00}^2 \sin^2 \psi_{II}}{16 \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}}}. \quad (31)$$

Эти соотношения показывают появление "обертонов".

Теперь подставим первое соотношение (31) и второе соотношение (4) в третье уравнение (2), учтём второе соотношение (6) и проведём интегрирование:

$$q_3(t) = q_3(0) + \frac{\mu^2}{4} [(1 - \mu a) P_0 t + 2aA_2 (\cos e_2 - \cos(\mu t + e_2))] + J_0, \quad (32)$$

где

$$J_0(\psi_{II}) = \frac{1}{\omega_{II}} \int_0^{\psi_{II}} \frac{P_0 d\psi_{II}}{\left(\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II} + \frac{\mu^2 \Delta_{00}^2}{8} \sin^2 \psi_{II} \right)}. \quad (33)$$

Вычисляя интеграл (33), окончательно получим [12]:

$$q_3(t) = q_3(0) + \frac{\mu^2 a A_2}{2} \{ \cos e_2 - \cos(\mu t + e_2) \} + \left[1 + \frac{\mu^2}{8} (3p_0 - \alpha_0) \right] t - \arctg \left\{ \frac{\chi \sin \psi_{II}}{1 + \cos \psi_{II}} \right\}. \quad (34)$$

Колебания сейсмического маятника характеризуются малыми углами нутации и кручения [10-12]. Разлагая третье соотношение (1) в безразмерных переменных по малому параметру μ , получим:

$$\varphi = q_2 + \frac{\mu}{4} q_1^2 \sin 2q_3 + \frac{\mu^3 q_1^4}{8} \sin^2 q_3 \sin 2q_3. \quad (35)$$

Теперь, подставив четвертое соотношение (7), (31), (32) в (35), получим зависимость изменения угла закручивания от времени. Не выписывая в явном виде эту зависимость, можно утверждать, что на медленные линейные крутильные колебания накладываются колебания в виде дрожаний, которые сложным образом зависят от комбинационных частот. Эти комбинационные частоты определяются частотами ω_{II} , ω_{III} , где

$$\omega_{III} = 1 + \frac{\mu^2}{8} (3p_0 - \alpha_0). \quad (36)$$

Для линейно поляризованных колебаний ($P_0 = 0$, $\chi = 1$, $\alpha_0 = \Delta_{00}$) второе соотношение (31), (35) и (34) переходят в

$$q_1(t) = A_0 \left(1 + \frac{\mu^2}{64} A_0^2 \right) \cos \psi_1 - \frac{\mu^2}{64} A_0^3 \cos 3\psi_1, \quad \psi_1 = \omega_1 t, \quad \omega_1 = 1 - \frac{\mu^2 A_0^2}{16}$$

$$\varphi = q_2 + \frac{q_1^2}{4} \sin 2q_3(0) + \frac{q_1^4}{8} \sin 2q_3(0) \sin^2 q_3(0) + \dots \quad (37)$$

$$q_3(t) = q_3(0) + \frac{\mu^2 a A_2}{2} \{ \cos e_2 - \cos(\mu t + e_2) \}.$$

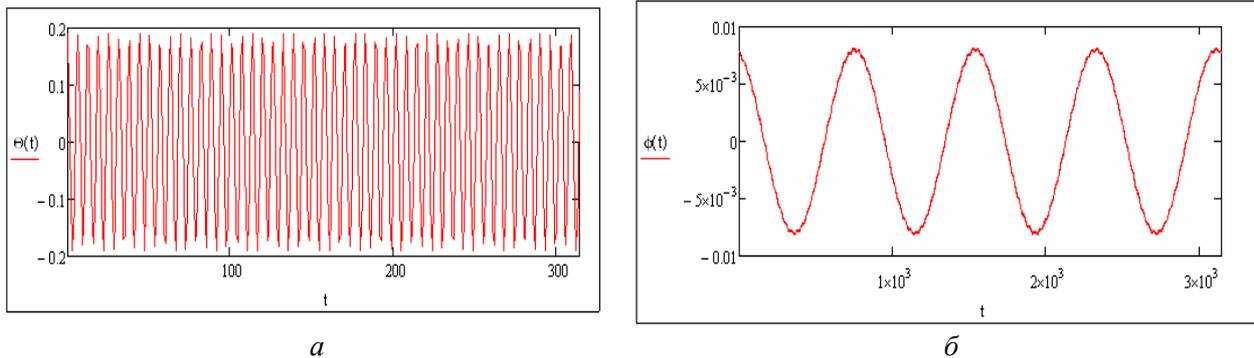
Заметим, что частота ω_{II} почти в два раза больше частоты ω_I . Для обоих вариантов характерно появление "обертонов".

Результаты численных расчетов

На рисунках 1–5 в безразмерных координатах приведены графики свободных колебаний угловых координат θ, φ для общего случая колебаний.

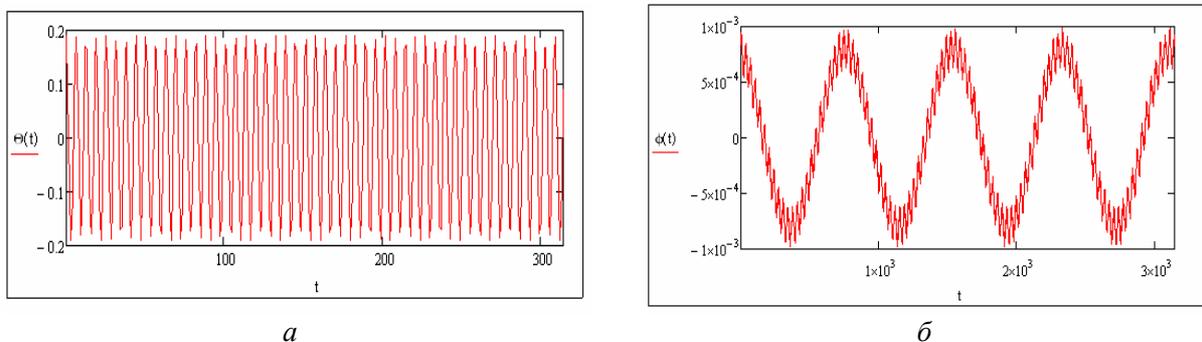
Графики 1–5 представляют свободные нутационные и крутильные колебания маятника для общего случая колебаний, когда $q_1(t) \neq 0$. Отчетливо прослеживается тенденция влияния начальных условий и обертонов на свободные колебания, что характерно для нелинейных колебаний.

Графики дают представление о влиянии уменьшения начальной амплитуды A_{20} на нутационные и крутильные колебания и влиянии дрожаний на крутильные колебания. Так, из рисунков 1а, 2а, 3а, 4а следует, что уменьшение A_{20} никак не влияет на нутационные колебания маятника. Из рисунков 1б, 2б, 3б, 4б следует, что с уменьшением A_{20} увеличивается влияние нутационных «дрожаний» на крутильные колебания.



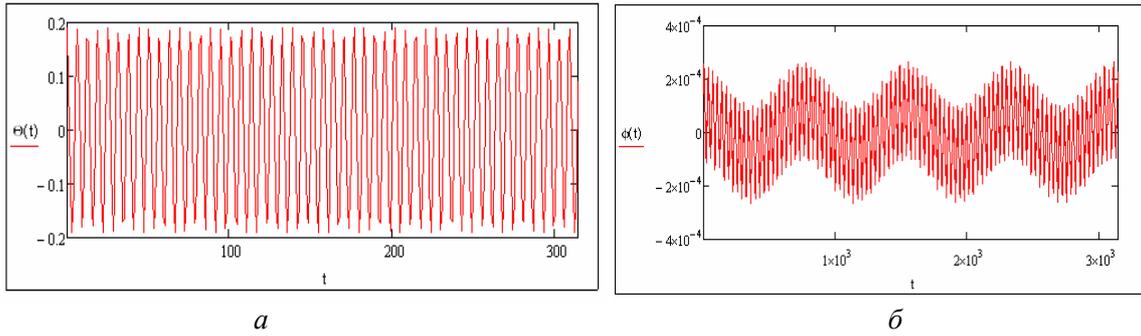
$$\mu = 8 \cdot 10^{-3}; \alpha = 0.06; q_{30} = \frac{\pi}{8}; e_2 = \frac{\pi}{12}; a = 0.8; A_2 = 0.008; P_0 = 0.05$$

Рисунок 1 – Графики зависимостей угловых координат θ, φ от времени (а, б)



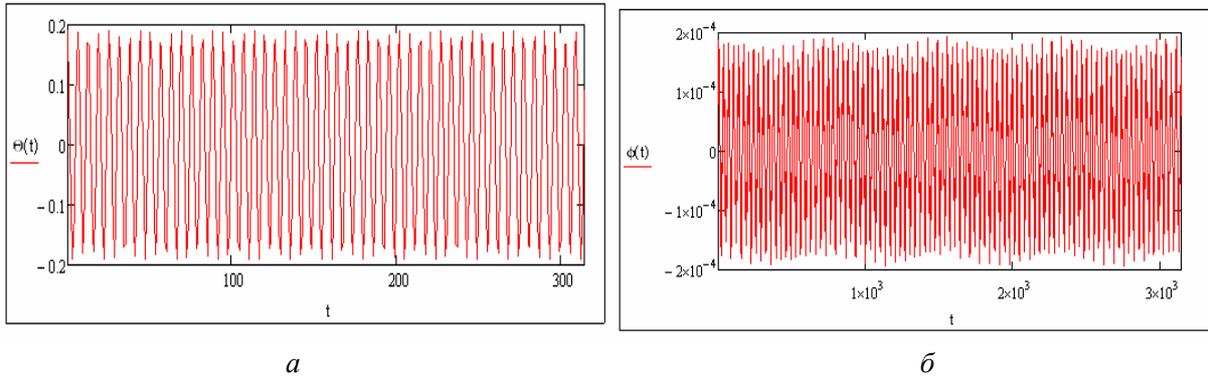
$$\mu = 8 \cdot 10^{-3}; \alpha = 0.06; q_{30} = \frac{\pi}{8}; e_2 = \frac{\pi}{12}; a = 0.8; A_2 = 0.0008; P_0 = 0.05$$

Рисунок 2 – Графики зависимостей угловых координат θ, φ от времени (а, б)



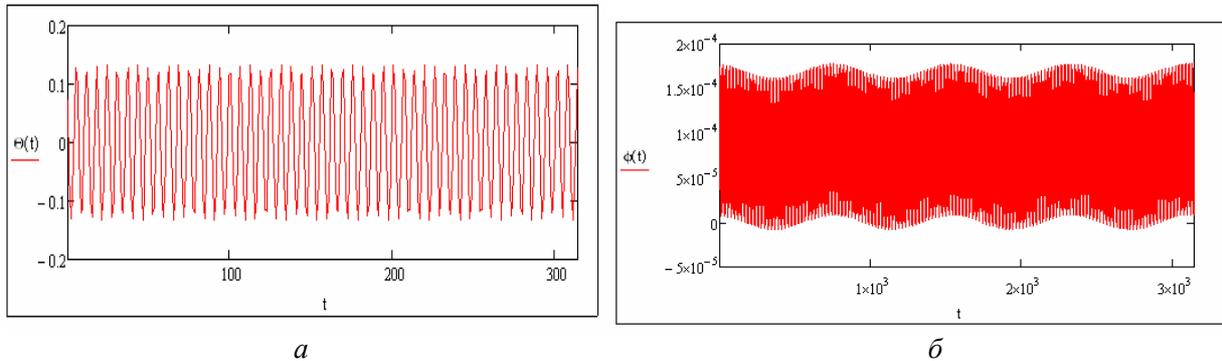
$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.000008 ; P_0 = 0.05$$

Рисунок 3 – Графики зависимостей угловых координат θ, φ от времени (а, б)



$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.000008 ; P_0 = 0.05$$

Рисунок 4 – Графики зависимостей угловых координат θ, φ от времени (а, б)



$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.000008 ; P_0 = 0.000005$$

Рисунок 5 – Графики зависимостей угловых координат θ, φ от времени (а, б)

При малой начальной амплитуде A_{20} (рисунок 4 б) практически теряется зависимость крутильных колебаний от частоты μ , и маятник закручивается с частотой нутационных колебаний.

Сопоставление графиков 4а, 4б с 5а, 5б дает представление о влиянии начального импульса P_0 при неизменно малой амплитуде A_{20} на угловые координаты. Он влияет как на нутационные колебания, так и на крутильные, оставляя последние «модулированными».

Для близких к линейно поляризованным колебаниям, как показали расчеты, общая картина колебаний остается примерно такой же, но начальный импульс P_0 не влияет на параметры колебаний, так как он равен нулю.

Приведенные выше расчетные зависимости свободных колебаний количественно подтверждают гипотезу И. И. Калининкова [7] о влиянии нутационных колебаний сейсмического крутильного маятника на его крутильные колебания и устанавливают между ними аналитическую связь.

Работа выполнена в рамках грантового финансирования "Фундаментальные исследования в области естественных наук" № 0502/ГФ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Завьялов А.Д. Среднесрочный прогноз землетрясений. Основы, методика, реализация. – М.: Наука, 2006. – 254 с.
- 2 Зубков С.И. Предвестники землетрясений. – М.: ОИФЗ РАН, 2002. – 140 с.
- 3 Любушин А.А. Анализ данных геофизического и экологического мониторинга. – М.: Наука, 2007. – 278 с.
- 4 Калининков И.И. Консервативные системы для геофизических исследований. – М.: ИФЗ СССР, 1983. – 178 с.
- 5 Зенков В.С., Калининков И.И., Нюнин М.И., Нюнина Н.А., Синякова В.Ф. Эквивалентная шумовая температура в лаборатории и землетрясения // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 239, № 1. – С. 74-76.
- 6 Зенков В.С., Калининков И.И., Нюнин М.И. Оперативный прогноз сильных землетрясений // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 2. – С. 325-327.
- 7 Калининков И.И. Консервативные системы для геофизических исследований. – М.: ИФЗ СССР, 1983. – 178 с.
- 8 Калининков И.И. Горизонтальные крутильные весы – сейсмоприемник с многолепестковой диаграммой направленности // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 317, № 4. – С. 868-872.
- 9 Калининков И.И., Матюнин В.П., Нюнина Н.А., Гетманская В.В. Оперативный прогноз землетрясений в телесеismicкой зоне – реальность // Доклады РАН. – 1992. – Т. 323, № 6. – С. 1068-1071.
- 10 Отчет НИР НПК «Прогноз». – Алматы: ГУ «Казселезащита», 1994–1999. – 168 с.
- 11 Отчет о научной деятельности Центральной лаборатории по прогнозу землетрясений НПК «Прогноз». – 2008. – 169 с.
- 12 Мартынов Н.И. Введение в теорию колебаний сейсмического маятника. – Алматы: LEM, 2005. – 162 с.
- 13 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
- 14 Гребенников Е.А., Митропольский Ю.А. Метод усреднения в исследованиях резонансных систем. – М.: Наука, 1992. – 221 с.
- 15 Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1962. – Т. 17, № 6. – С. 3-126.
- 16 Мартынов Н.И. Собственные нелинейные колебания сейсмического маятника // Вестник НАН РК. – 2006. – № 5. – С. 48-51.

REFERENCES

- 1 Zav'jalov A.D. Srednesrochnyj prognoz zemletrjasenij. Osnovy, metodika, realizacija. *Nauka*, **2006**, 254 p. (in Russ.).
- 2 Zubkov S.I. Predvestniki zemletrjasenij. *OIFZ RAN*, **2002**, 140 p. (in Russ.).
- 3 Ljubushin A.A. Analiz dannyh geofizicheskogo i ekologicheskogo monitoringa. *Nauka*, **2007**, 278 p. (in Russ.).
- 4 Kalinnikov I.I. Konservativnye sistemy dlja geofizicheskikh issledovanij. *IFZ SSSR*, **1983**, 178 p. (in Russ.).
- 5 Zenkov V.S., Kalinnikov I.I., Njunin M.I., Njunina N.A., Sinjakova V.F. Ekvivalentnaja shumovaja temperatura v laboratorii i zemletrjasenija *Doklady AN SSSR*, **1978**, Vol. 239, №1, P. 74-76 (in Russ.).
- 6 Zenkov V.S., Kalinnikov I.I., Njunin M.I. Operativnyj prognoz sil'nyh zemletrjasenij *Doklady AN SSSR*, **1980**, Vol. 254, №2, P. 325-327 (in Russ.).
- 7 Kalinnikov I.I. Konservativnye sistemy dlja geofizicheskikh issledovanij. *IFZ SSSR*, **1983**, 178 p. (in Russ.).
- 8 Kalinnikov I.I. Gorizontal'nye krutil'nye vesy - sejsmopriemnik s mnogolepestkovoj diagrammoj napravlenosti *Doklady AN SSSR*, **1991**, Vol. 317, №4, P. 868-872 (in Russ.).
- 9 Kalinnikov I.I., Matjunin V.P., Njunina N.A., Getmanskaja V.V. Operativnyj prognoz zemletrjasenij v teleseismickej zone - real'nost' *Doklady RAN*, **1992**, Vol.323, №6, P. 1068-1071 (in Russ.).
- 10 Report NIR NPK «Prognoz» GU «Kazselezashhita», **1994-1999**, 168 p. (in Russ.).
- 11 Otchet o nauchnoj dejatel'nosti Central'noj laboratorii po prognozu zemletrjasenij NPK «Prognoz», **2008**. 169 p. (in Russ.).
- 12 Martynov N.I. Vvedenie v teoriju kolebanij sejsmicheskogo majatnika. *LEM*, **2005**, 162 p. (in Russ.).
- 13 Bogoljubov N.N., Mitropol'skij Ju.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. *Nauka*, **1974**, 503 p. (in Russ.).
- 14 Grebennikov E.A., Mitropol'skij Ju.A. Metod usrednenija v issledovanijah rezonansnyh sistem. *Nauka*, **1992**, 221 p. (in Russ.).
- 15 Volosov V.M. Usrednenie v sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenij *UMN*, **1962**, Vol. 17, № 6, P. 3 - 126 (in Russ.).
- 16 Martynov N.I. Sobstvennye nelinejnye kolebanija sejsmicheskogo majatnika *Vestnik NAN RK*, **2006**, № 5, P. 48-51 (in Russ.).

Резюме

Н. И. Мартынов, М. А. Рамазанова, А. А. Чупрасов

(Ө. А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ.)

**СЕЙСМИКАЛЫҚ БҰРАЛМАЛЫ МАЯТНИКТИҢ
БЕЙСЫЗЫҚ ЕРКІН ТЕРБЕЛІСТЕРІ**

Орталау әдісінің көмегімен сейсмикалық бұралмалы маятниктің бейсызық еркін тербелістері кезіндегі бұрыштық координаттары үшін талдау өрнектер алынған. Осы өрнектердің талдауы мен жүргізілген компьютерлік үлгілеу сейсмикалық маятниктің еркін тербелістерінің заңдылықтары мен ерекшеліктерін тағайындауға мүмкіндік берді.

Кілт сөздер: бейсызық тербелістер, бұрыштық координаттар, маятник, компьютерлік үлгілеу, жерсілкінісі, болжам.

Summary

N. I. Martynov, M. A. Ramazanova, A. A. Chuprassov

(Mechanics and Engineering Institute named Academician U.A. Dzholdasbekova, Almaty)

**FREE NONLINEAR OSCILLATIONS
OF THE SEISMIC TORSIONAL PENDULUM**

Analytical expressions for angular coordinates of a seismic torsional pendulum are received at free nonlinear oscillations using averaging method. The analysis of these expressions and the carried-out computer modeling allowed to determine consistent patterns and the features of seismic pendulum free oscillations.

Keywords: nonlinear vibration, angular coordinates, the pendulum, computer modeling, earthquake prediction.

Поступила 24.01.2013г.

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, А. А. КОПЖАСАРОВА

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация

В данной работе получено спектральное разложение вольтеррова оператора Штурма–Лиувилля в пространстве Крейна.

Ключевые слова: обратный оператор, краевая задача, оператор Штурма–Лиувилля, ортонормированный базис, спектральные разложения.

Кілт сөздер: кері оператор, шеткі есеп, Штурман–Лиувилль операторы, ортонормаланған базис, спектральдық таралым.

Keywords: inverse, boundary problem, the Sturm-Liouville orthonormal basis, the spectral decomposition.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i = [y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями (2), где a_{ij} ($i = 1,2; j = 1,2,3,4$) – произвольные комплексные числа, спектральный параметр. Последнее условие означает, что хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} \quad (i, j = 1,2,3,4) \quad \text{граничной матрицы}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad (3)$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма–Лиувилля (1)-(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной z плоскости C .

Пусть L – вольтерровый оператор Штурма–Лиувилля, тогда его сопряженный L^* также является вольтерровым. Через S обозначим оператор, заданного формулой

$$Su(x) = u(1-x), \quad \forall u(x) \in L^2(0,1) \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вольтерровый оператор Штурма–Лиувилля L называется S самосопряженным, если имеет место равенство

$$SL = L^*S \quad (5)$$

Постановка задачи. Получить «спектральное» разложение вольтеррового оператора Штурма–Лиувилля, удовлетворяющего условию (5).

Основная идея работы состоит в следующем. При выполнении условия (5) оператор SL окажется самосопряженным. Если принять во внимание компактность оператора L^{-1} , то оператор SL^{-1} окажется самосопряженным и компактным оператором, для которого справедлива теорема Гильберта–Шмидта, суть которой состоит в следующем.

Для любого компактного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом пространстве H существует ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, такая, что каждый элемент $x \in H$ записывается единственным образом

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \varphi_n) \varphi_n + \varphi_0 \quad (6)$$

где вектор $\varphi_0 \in \text{Ker}A$, т.е. удовлетворяет условию $A\varphi_0 = 0$; при этом

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, \varphi_n) \times \varphi_n \quad (\lambda_n \neq 0) \quad (7)$$

и если система $\{\varphi_n\}$ бесконечна, то $\lim \lambda_n = 0$ ($n \rightarrow \infty$) [1, с. 231].

Из этой теоремы следует, что если $\text{Ker} A = \{0\}$, т.е. $\varphi_0 = 0$, то ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ образует ортонормированный базис пространстве H . Этот момент нами используется существенно, а также формулы (6) и (7).

Отметим очевидные свойства оператора S [см. ф.(5)]. Этот оператор унитарен и самосопряжен в пространстве H , поэтому имеет место формулы $S^2 = I$, $S^{-1} = S$, где I тождественный оператор.

2. Вспомогательные предложения. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1)-(2) являются квадратами корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} + \Delta_{24} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad (8)$$

где Δ_{ij} находятся по формуле (3) [2, с. 35]. Функция $\Delta(\lambda)$ относится к классу целых функций экспанциального типа [3, с. 42], для которых справедлива лемма 1 [4, с. 31].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа.

ЛЕММА 2. Оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \Delta_{13} = 0, \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0 \quad (9)$$

где Δ_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$) вычисляется по формуле (3).

Достаточность условий (9) следует из формулы (8), а необходимость является следствием леммы 1.

ЛЕММА 3. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то существует комплексное число k такое, что граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1), \quad k \in \mathbb{C}.$$

ЛЕММА 4. Если L – вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля вида

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0, 1) \quad (10)$$

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

то формула

$$SL = L^*S,$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\bar{k} + k = 0.$$

ЛЕММА 5. Если $k^2 - 1 \neq 0$, то существует обратный оператор к оператору (10)-(11), который является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что обратный оператор L^{-1} к оператору (10)-(11) имеет вид

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt, \quad (12)$$

где

$$K(x, t) = \frac{(kx + kt + t - x - k)\theta(x - t) + k(x - kx + kt + t - 1)\theta(t - x)}{1 - k^2} \quad (13)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Из формулы (13) очевидна ограниченность ядра внутри квадрата $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, поэтому это ядро относится к классу Гильберта-Шмидта, следовательно, оператор (12) является вполне непрерывным в пространстве $L^2(0, 1)$ [5.с. 155].

3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Если $\bar{k} + k = 0$, то для вольтеррова оператора ($k^2 \neq 1$)

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0, 1) \quad (10)$$

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1) \quad (11)$$

имеет место формулы

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, \quad (14)$$

$$Lg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \varphi_n) S\varphi_n, \quad (15)$$

где S определен формулой (4) λ_n – собственные значения самосопряженного оператора SL , φ_n – ортонормированные собственные функции этого же оператора в пространстве $L^2(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 и условий теоремы, оператор SL самосопряжен в пространстве H . Тогда в силу леммы 5, оператор $(SL)^{-1}$ самосопряжен и компактен в пространстве $L^2(0,1)$. Если $(SL)^{-1}\varphi = 0$, то действуя оператором SL слева, имеем $\varphi = 0$, следовательно $\text{Ker}(SL)^{-1} = \{0\}$.

Поэтому ортонормированные собственные функции оператора $(SL)^{-1}$ образуют ортонормированный базис пространства H . Тогда для любого элемента f пространства H имеем

$$(SL)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} ((SL)^{-1}f, \varphi_n) \times \varphi_n,$$

где $\{\varphi_n\}$ ортонормированный базис пространства H , составленный из собственных векторов оператора SL , т.е. имеет место равенства

$$SL\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

Следовательно

$$(SL)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, (SL)^{-1}\varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n;$$

Преобразуя левую часть этой формулы, получим

$$L^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n.$$

Теперь, заменив в последней формуле f на Sf , имеем

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n$$

Аналогичным путем получим $\forall g \in D(L)$

$$\begin{aligned} SLg &= \sum_{n=1}^{\infty} (SLg, \varphi_n) \times \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (g, SL\varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \lambda_n\varphi_n) \varphi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \varphi_n) \varphi_n \rightarrow Lg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \varphi_n) S\varphi_n. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. – 544 с.
- 2 Пятков С.Г., Егоров И.Е., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

REFERENCES

- 1 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkicii i funkcional'nogo analiza. – M.: Nauka, 1976. – 544(in Russ.).
- 2 Pyatovskii S.G., Egorov I.E., Popov S.V. Neklassicheskie differencial'no-operatornyye uravneniya. – Novosibirsk: Nauka, 2000. – 336 (in Russ.).

А. Ш. Шалданбаев, А. А. Көпжасарова

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

ШТУРМ–ЛИУВИЛЛ ВОЛТЕРЛІ ОПЕРАТОРЫНЫҢ СПЕКТРАЛДЫ ЖІКТЕЛУІ

Бұл еңбекте волтерлі Штурм–Лиувилл операторының Крейн кеңістігіндегі спектралды таралымы алынды.

Кілт сөздер: кері оператор, шеткі есеп, Штурман–Лиувилль операторы, ортонормаланған базис, спектралды таралым.

Summary

A. Sh. Zhaldanbayev, A.A. Kopzhasarova

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

SPECTRAL DECOMPOSITION OF THE STURM–LIOUVILLE VOLTERRA OPERATORS

In this paper, spectral decomposition Volterra the operator of Sturm–Liouville in Crane's space is received.

Keywords: inverse, boundary problem, the Sturm-Liouville orthonormal basis, the spectral decomposition.

Поступила 6.02.2013г.

Д. СУРАГАН^{1,2}, Е. Х. НЕСИПБАЕВ^{1,2}¹ Институт математики и математического моделирования, МОН РК, г. Алматы,² Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА
ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ****Аннотация**

В ограниченной односвязной области евклидового пространства получены граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения. Показано, что полученная нелокальная граничная задача для бигармонического уравнения имеет единственное решение, которое совпадает с объемным потенциалом в области определения оператора. В теории дифференциальных уравнений в частных производных практически невозможно построить точное решение граничной задачи для любой области евклидового пространства. Новизной полученной нелокальной граничной задачи является то, что мы представляем решение в явном виде для любой области многомерного евклидового пространства. Для иллюстрации наших результатов мы рассматриваем одномерный потенциал и находим соответствующие ему граничные условия.

Ключевые слова: объемный потенциал, бигармоническое уравнение, фундаментальное решение, потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя.

Кілт сөздер: аумақты әлеует, бигармондық тендеу, іргелі шешім, жай кабаттың әлеуеті, қос кабаттың әлеуеті.

Keywords: volume potential, bi-harmonic equation, fundamental solution, single layer potential, double layer potential.

В ограниченной односвязной области $\Omega \subset R^n$ ($n > 1$) с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим бигармонический объемный потенциал

$$u(x) = \varepsilon_{2,n} * f \equiv \int_{\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y)f(y)dy, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_{2,n}(x-y) = \begin{cases} d_{2,n}|x-y|^{4-n} \ln|x-y|, & \text{если } n = 2, 4, \\ d_{2,n}|x-y|^{4-n}, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (2)$$

– фундаментальное решение [1, с. 520] бигармонического уравнения:

$$(-\Delta_x)^2 u(x) = f(x), \quad (3)$$

т.е.

$$(-\Delta_x)^2 \varepsilon_{2,n}(x-y) = \delta(x-y), \quad (4)$$

здесь δ – дельта-функция Дирака и

$$d_{2,n} = \frac{1}{8(4-n)(2-n)} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}.$$

Так как фундаментальное решение $\varepsilon_{2,n}(x-y)$ симметрично, вещественнозначно и имеет слабую особенность, то интегральный оператор $\varepsilon_{2,n} * f$ является вполне непрерывным самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$ и функция $u(x)$ удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению (3).

Основным результатом настоящей работы является нахождение граничных условий, которые однозначно определяют бигармонический объемный потенциал (1).

Отметим, что граничные условия объемного потенциала, т.е. ньютонового потенциала, приведены в работе [2].

Имеет место

Теорема. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ бигармонический объемный потенциал $u = \varepsilon_{2,n} * f$ принадлежит классу $W_2^4(\Omega)$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned}
 & -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(-\Delta_x)u(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y) (-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Обратно, если функция $u \in W_2^4(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (4) и граничным условиям (5), то она определяет объемный потенциал по формуле (1).

Доказательство. Применяя к функции $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$ формулу Грина, при любом $x \in \Omega$, получаем равенство

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \varepsilon_{2,n} * f \equiv \int_{\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) (-\Delta_y)^2 u(y) dy = \\
 &= \int_{\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) (-\Delta_y)u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & \quad - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)u(y)}{\partial n_y} dS_y = \\
 &= \int_{\Omega} (-\Delta_y)^2 \varepsilon_{2,n}(x-y) u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & \quad - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)u(y)}{\partial n_y} dS_y, \quad x \in \Omega,
 \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + n_n \frac{\partial}{\partial y_n}$ – нормальная производная на границе, а n_1, \dots, n_n – составляющие единичной нормали. Отсюда вытекает тождество

$$\begin{aligned}
 I_1(u)(x) &:= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Используя свойства потенциалов двойного и простого слоя [4, с. 137], из (6), при $x \rightarrow \partial\Omega$, находим

$$\begin{aligned}
 I_0(u)(x) := & -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Итак, равенство $I_1(u)(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0$ является одним из граничных условий объемного потенциала (1). Далее будем искать остальные граничные условия так, чтобы получить корректно определенную краевую задачу для бигармонического уравнения (3). Для этого запишем его в виде

$$(-\Delta_x)(-\Delta_x)u(x) = f(x). \tag{8}$$

И проведем, как и выше, аналогичные вычисления

$$\begin{aligned}
 (-\Delta_x)u(x) = \varepsilon_{1,n} * f & \equiv \int_{\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)(-\Delta_y)u(y) dy = \\
 & = \int_{\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)u(y) dy + \\
 & + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y, \quad x \in \Omega,
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{1,n}(x-y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа (8), т.е.

$$(-\Delta_x)\varepsilon_{1,n}(x-y) = \delta(x-y).$$

Из предыдущих соотношений получим следующие тождества:

$$\begin{aligned}
 I_2(u)(x) := & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y = 0, \quad x \in \Omega.
 \end{aligned}$$

Используя свойства потенциалов двойного и простого слоя [4, с. 137], при $x \rightarrow \partial\Omega$ получаем, что

$$\begin{aligned}
 I_2(u)(x) := & -\frac{1}{2}(-\Delta_x)u(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)u(y) dS_y - \\
 & - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)u(y) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega,
 \end{aligned} \tag{9}$$

является другим граничным условием объемного потенциала (1).

Далее, предельным переходом не сложно показать, что формула (9) остается справедливой и для всех $u \in W_2^4(\Omega)$.

Обратно, покажем, что если другая функция $w \in W_2^4(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $(-\Delta)^2 w = f$ и граничным условиям (5), то она совпадает с бигармоническим объемным потенциалом (1).

Действительно, в противном случае функции $v = u - w \in W_2^4(\Omega)$, где u – бигармонический объемный потенциал (1), удовлетворяли бы однородному уравнению $(-\Delta)^2 v = 0$ с граничными условиями

$$I_1(v)(x) := -\frac{v(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)v(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

$$I_2(v)(x) := -\frac{1}{2}(-\Delta_x)v(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Применяя формулу Грина к функции $v \in W_2^4(\Omega)$, как и выше, убеждаемся в том, что

$$0 = \varepsilon_{2,n} * 0 = \int_{\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y)(-\Delta_y)^2 v(y) dy =$$

$$= \int_{\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)(-\Delta_y)v(y) dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{2,n}(x-y)(-\Delta_y)v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y) dS_y =$$

$$= \int_{\Omega} (-\Delta_y)^2 \varepsilon_{2,n}(x-y)v(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)v(y)}{\partial n_y} dS_y =$$

$$= v(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_{2,n}(x-y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y) dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{2,n}(x-y) \frac{\partial(-\Delta_y)v(y)}{\partial n_y} dS_y, \quad x \in \Omega.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \rightarrow \partial\Omega$, получаем равенство

$$v(x)|_{x \in \partial\Omega} = -I_1(v)(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 0 &= \varepsilon_{1,n} * 0 = \int_{\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)(-\Delta_y)v(y)dy = \\
 &= \int_{\Omega} (-\Delta_y)\varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)v(y)dy + \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)v(y)dS_y - \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y)dS_y = \\
 &= (-\Delta_x)v(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{1,n}(x-y)(-\Delta_y)v(y)dS_y - \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{1,n}(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)v(y)dS_y, \quad x \in \Omega.
 \end{aligned}$$

Снова переходя к пределу при $x \rightarrow \partial\Omega$, получим

$$(-\Delta_x)v(x)|_{x \in \partial\Omega} = -I_2(v)(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (11)$$

Из единственности решения задачи Навье для бигармонического уравнения:

$$\begin{aligned}
 (-\Delta)^2 v &= 0, \quad x \in \Omega, \\
 (-\Delta_x)v(x)|_{x \in \partial\Omega} &= 0, \quad v(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0
 \end{aligned}$$

вытекает, что $v = u - w \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega$, т.е. w совпадает с объемным потенциалом $u = \varepsilon_{2,n} * f$.

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы следует, что ядро объемного потенциала, т.е. фундаментальное решение бигармонического уравнения (3), является функцией Грина задачи (3), (5) в области Ω .

Пример. При $n = 1$ одномерный бигармонический объемный потенциал на интервале $\Omega = (-1, 1)$ задается равенством

$$u(x) = \frac{1}{12} \int_{-1}^1 |x-t|^3 f(t) dt. \quad (12)$$

Поскольку

$$u^{(IV)} = f, \quad (13)$$

то находим

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{12} \left[\int_{-1}^x (x-t)^3 u^{(IV)}(t) dt - \int_x^1 (x-t)^3 u^{(IV)}(t) dt \right] = \\
 &= u(x) + \frac{1}{12} [- (x+1)^3 u'''(-1) - 3(x+1)^2 u''(-1) - \\
 &\quad - 6(x+1)u'(-1) - 6u(-1) - \\
 &\quad - (x-1)^3 u'''(1) - 3(x-1)^2 u''(1) - 6(x-1)u'(1) - 6u(1)], \\
 &\quad x \in \Omega = (-1, 1) \\
 &\frac{1}{12} [(x+1)^3 u'''(-1) + 3(x+1)^2 u''(-1) + 6(x+1)u'(-1) + 6u(-1) + \\
 &\quad + (x-1)^3 u'''(1) + 3(x-1)^2 u''(1) + 6(x-1)u'(1) + 6u(1)] = 0 \\
 &\quad \forall x \in \Omega = (-1, 1).
 \end{aligned}$$

Следовательно, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях многочлена, заключаем, что самосопряженное граничное условие одномерного объемного потенциала имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
u''''(-1) + u''''(1) = 0, \quad u''''(-1) - u''''(1) + u''(-1) + u''(1) = 0, \\
u''''(-1) + u''''(1) + 2(u''(-1) - u''(1)) + 2(u'(-1) + u'(1)) = 0, \\
u''''(-1) - u''''(1) + 3(u''(-1) + u''(1)) + \\
+ 6(u'(-1) - u'(1)) + 6(u(-1) + u(1)) = 0.
\end{aligned}$$

После не сложных преобразований последние равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned}
u''''(-1) + u''''(1) = 0, \quad u''''(-1) - u''''(1) + u''(-1) + u''(1) = 0, \\
u''(-1) - u''(1) + u'(-1) + u'(1) = 0, \quad (14) \\
2(u''(-1) + u''(1)) + 6(u'(-1) - u'(1)) + 6(u(-1) + u(1)) = 0,
\end{aligned}$$

т.е. единственным решением задачи (13), (14) является бигармонический объемный потенциал (12).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М., 1974.
- 2 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Докл. РАН. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 16-19.
- 3 Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. – New York, 1970.
- 4 Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. – Heidelberg, 2008.
- 5 Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фунд. направления. – 1988. – Т. 27. – С. 131-230.

REFERENCES

1. Sobolev S.L. Vvedenie v teoriiu kubaturnykh formul. – Moscow, 1974 (in Russ.).
- 2 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spectral'ny'm voprosam ob'emnogo potentsiala // Doklady RAN. – 2009. – Т. 428, N 1. – P. 16-19.
- 3 Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. – New York, 1970.
- 4 Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. – Heidelberg, 2008.
- 5 Maz'ia V.G. Granichnye integral'nye uravneniia // Itogi nauki i tekhniki. Sovr.problememy matematiki. Fund.napravleniia. – 1988. – Т. 27. – P. 131-230.

Резюме

Д. Сураган^{1,2}, Е. Х. Несинбаев^{1,2}

(¹ҚР БҒМ математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы қ.,
²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

БИГАРМОНДЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН КӨЛЕМДІК ӘЛЕУЕТТІҢ ШЕКТЕС ЖАҒДАЙЫ

Евклид кеңістігіндегі бір байланысты шектес аймағының бигармондық тендеуі үшін көлемдік әлеуеттің шектес жағдайы алынған. Бигармондық тендеу үшін алынған окшауланбаған шектік есебінің операторды анықтау аймағы көлемдік әлеуетіне үйлесімді жалғыз шешімнің бар болуы көрсетілген. Жеке туындының дифференциалдық тендеуі теориясында евклид кеңістігінің кезкелген аймағы үшін шектес есептің дәл шешіліп табу еш мүмкін емес. Алынған окшауланбаған шектес есептің жаңалығы мынада – көпөлшемді евклид кеңістігі аймағы үшін біз оның айқын шешімін таптық. Қол жеткізген нәтижелерімізді түсіндіру үшін біз бірөлшемді әлеуетті қарастырып, соған сәйкес келетін шектес жағдайды таптық.

Кілт сөздер: аумақты әлеует, бигармондық тендеу, іргелі шешім, жай қабаттың әлеуеті, қос қабаттың әлеуеті.

Summary

D. Suragan^{1,2}, Ye. Nessipbayev^{1,2}

(¹Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan)
²al-Farabi Kazakh National University, Almaty)

ON BOUNDARY CONDITIONS OF THE VOLUME POTENTIAL
FOR THE BI-HARMONIC EQUATION

In this paper is obtained boundary conditions of the volume potential for the bi-harmonic equation in bounded simply connected domain of Euclidean space. We show that the obtained non-local boundary value problem for the bi-harmonic equation has a unique solution which coincides with the volume potential in the definition domain of the operator. Usually in PDE, it is almost impossible to construct an explicit solution of a boundary value problem for any domain of Euclidean space. A novelty of the obtained non-local boundary value problem is that we can solve it in an explicit form for any domain of multidimensional Euclidian space. To illustrate our results we consider one-dimensional potential and find corresponding boundary conditions for it.

Keywords: volume potential, bi-harmonic equation, fundamental solution, single layer potential, double layer potential.

Поступила 5.02.2013г.

 МАЗМҰНЫ

Плазма, газдар және сұйықтар физикасы

<i>Жұмағұлова Қ.Н., Шаленов Е.О., Фабдуллина Г.Л.</i> Квазиклассикалық плазманың зардыталған бөлшектері әрекеттесуінің динамикалық әлеуеті және шашырау қималары.....	3
<i>Асқарова А. С., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Мақсұтханова А.М., Шортанбаева Ж.К., Мұқашева Г.К., Рахымбаева Н.Б., Қонақбаев Б.О.</i> Көмір жылустанцияларын сандық үлгілеудің сипаттамалары.....	10

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Алдашев С.А.</i> Көпөлшемді Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін екі кеңістікті Геллерстед есебі.....	16
<i>Капалова Н.А.</i> Позциялы емес полиномды санау жүйесі негізінде Эль-Гамаль шифрлау алгоритмінің модификациясы.....	22
<i>Құралбаев З.К., Ержан А.А.</i> Электрлік тізбектегі өтпелі үдеріс туралы бір есепті шешу.....	27
<i>Мартынов Н.И., Рамазанова М.А., Чупрасов А.А.</i> Сейсмикалық бұралмалы маятниктің бейсызық еркін тербелістері.....	33
<i>Шалданбаев А.Ш., Көпжасарова А.А.</i> Штрум–Лиувилл волтерлі операторының спектралды жіктелуі.....	42
<i>Сұраған Д., Несіпбаев Е.Х.</i> Бигармондық теңдеу үшін көлемдік әлеуеттің шектес жағдайы.....	46

СОДЕРЖАНИЕ

Физика плазмы, газов и жидкостей

<i>Джумагулова К.Н., Шаленов Е.О., Габдуллина Г.Л.</i> Динамический потенциал взаимодействия и сечения рассеяния заряженных частиц квазиклассической плазмы.....	3
<i>Аскарова А. С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Шортанбаева Ж.К., Мукашева Г.К., Рахимбаева Н.Б., Конакбаев Б.О.</i> Численное моделирование характеристик угольных теплостанций.....	10

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Алдашев С.А.</i> Пространственные задачи Геллерстедта для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе.....	16
<i>Капалова Н.А.</i> Модифицированный алгоритм шифрования Эль-Гамала на базе непозиционных полиномиальных систем счисления.....	22
<i>Куралбаев З.К., Ержан А.А.</i> Решение одной задачи о переходном процессе в электрической цепи.....	27
<i>Мартынов Н.И., Рамазанова М.А., Чупрасов А.А.</i> Свободные нелинейные колебания сейсмического крутильного маятника.....	33
<i>Шалданбаев А.Ш., Копжасарова А.А.</i> Спектральные разложения вольтерровых операторов Штурма–Лиувилля.....	42
<i>Сураган Д., Несипбаев Е.Х.</i> Граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения.....	46

CONTENTS

Physics of plasma, gases and liquids

<i>Dzhumagulova K.N., Shalenov E.O., Gabdullina G.L.</i> Dynamic potential of interaction and the scattering cross section of charged particles semiclassical plasmas.....	3
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Maksuthanova A.M., Shortanbaeva J.K., Mukasheva G.K., Rakhimbayeva N.B. Konakbaev B.O.</i> Numerical modeling of characteristics coal heating plant.....	10

Theoretical and experimental researches

<i>Aldashev S.A.</i> Spatial problems gellerstedt for multidimensional Lavrent'ev-Bitsadze.....	16
<i>Kapalova N.A.</i> The modified algorithm of encryption El Gamal on the basis of not positional polynomial notations.....	22
<i>Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A.</i> On the solution of a problem of the transition process in the electrical circuit.....	27
<i>Martynov N.I., Ramazanova M.A., Chuprassov A.A.</i> Free nonlinear oscillations of the seismic torsional pendulum.....	33
<i>Shaldanbayeva A.Sh., Kopzhasarova A.A.</i> Spectral decomposition of the Sturm–Liouville Volterra operators.....	42
<i>Suragan D., Nessipbayev Ye.</i> On boundary conditions of the volume potential for the bi-harmonic equation.....	46

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.02.2013.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
3,65 п.л. Тираж 3000. Заказ 1.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ ЖУРНАЛОВ НАН РК

В журналах публикуются научные статьи и заметки, экспресс-сообщения о результатах исследований в различных областях естественно-технических и общественных наук.

Журналы публикуют сообщения академиков НАН РК, а также статьи других ученых, **представленные** действительными членами НАН РК (академиками НАН РК), несущими ответственность за достоверность и значимость научных результатов и актуальность научного содержания рекомендуемых работ.

Представленные для опубликования материалы должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Содержать результаты оригинальных научных исследований по актуальным проблемам в области физики, математики, механики, информатики, биологии, медицины, геологии, химии, экологии, общественных и гуманитарных наук, ранее не опубликованные и не предназначенные к публикации в других изданиях. Статья сопровождается разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнено исследование и **представлением** от академика НАН РК.

2. Статья представляется в одном экземпляре. Размер статьи не должен превышать 5-7 страниц (статья обзорного характера – до 15 стр.), включая аннотацию в начале статьи перед основным текстом, которая должна отражать цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы (**аннотация** не менее 1/3 стр. через 1 компьютерный интервал, 12 пт), таблицы, рисунки, список литературы (12 пт через 1 компьютерный интервал), напечатанных в редакторе Word 2003, шрифтом Times New Roman 14 пт, с пробелом между строк 1,5 компьютерных интервала, поля – верхнее и нижнее 2 см, левое 3 см, правое 1,5 см. Количество рисунков – не более пяти. В начале статьи вверху слева следует указать индекс **УДК**. Далее посередине страницы прописными буквами (курсивом) – инициалы и фамилии авторов, должность, степень, затем посередине строчными буквами – название организации(ий), в которой выполнена работа и город, ниже также посередине заглавными буквами (полужирным шрифтом) – название статьи; Аннотация на языке статьи, **ключевые слова**. В конце статьи даются резюме на двух языках (русском (казахском), английском, перевод названия статьи, также на 3-х языках данные автора). Последняя страница подписывается всеми авторами. Прилагается электронный вариант на CD-диске.

3. Статьи публикуются на русском, казахском, английском языках. К статье необходимо приложить на отдельной странице Ф.И.О. авторов, название статьи, наименование организации, город, аннотации на двух языках (на казахском и английском, или русском и английском, или казахском и русском), а также сведения об авторах (уч.степень и звание, адрес, место работы, тел., факс, e-mail).

4. Ссылки на литературные источники даются цифрами в прямых скобках по мере упоминания. Список литературы оформляется следующим образом:

1. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

2. *Чудновский А.Ф.* Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1994. 444 с.

3. В случае переработки статьи по просьбе редакционной коллегии журнала датой поступления считается дата получения редакцией окончательного варианта. Если статья отклонена, редакция сохраняет за собой право не вести дискуссию по мотивам отклонения.

ВНИМАНИЕ!!!

С 1 июля 2011 года вводятся следующие дополнения к Правилам:

После списка литературы приводится список литературы в романском алфавите (References) для SCOPUS и других БАЗ ДАННЫХ полностью отдельным блоком, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите (латиница).

В References не используются разделительные знаки («//» и «←»). Название источника и выходные данные отделяются от авторов типом шрифта, чаще всего курсивом, точкой или запятой.

Структура библиографической ссылки: авторы (транслитерация), название источника (транслитерация), выходные данные, указание на язык статьи в скобках.

Пример ссылки на статью из российского переводного журнала:

Gromov S.P., Fedorova O.A., Ushakov E.N., Stanislavskii O.B., Lednev I.K., Alfimov M.V. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, 317, 1134-1139 (in Russ.).

На сайте <http://www.translit.ru/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского текста в латиницу, используя различные системы. Программа очень простая, ее легко использовать для готовых ссылок. К примеру, выбрав вариант системы Библиотеки Конгресса США (LC), мы получаем

изображение всех буквенных соответствий. Вставляем в специальное поле весь текст библиографии на русском языке и нажимаем кнопку «в транслит».

Преобразуем транслитерированную ссылку:

- 1) убираем транслитерацию заглавия статьи;
- 2) убираем специальные разделители между полями (“/”, “-”);
- 3) выделяем курсивом название источника;
- 4) выделяем год полужирным шрифтом;
- 5) указываем язык статьи (in Russ.).

Просьба к авторам статей представлять весь материал в одном документе (одном файле) и точно следовать Правилам при оформлении начала статьи: посередине страницы прописными буквами (курсивом) – фамилии и инициалы авторов, затем посередине строчными буквами – название организации (ий), в которой выполнена работа, и город, ниже также посередине заглавными буквами (полужирным шрифтом) – название статьи. Затем следует аннотация, ключевые слова на 3-х языках и далее текст статьи.

Точно в такой же последовательности следует представлять резюме на двух других языках в том же файле только на отдельной странице (Ф.И.О. авторов, название статьи с переводов на 2 других языка, наименование организации, город, резюме). Далее в том же файле на отдельной странице представляются сведения об авторах.

Тел. Редакции 272-13-19

Оплата:

ТОО Исследовательский центр НАН РК

Алматинский филиал АО БТА Банк

KZ 44319A010000460573

БИН 060540019019, РНН 600900571703

КБЕ 17, КНП 859, БИК АВКЗКЗКХ

За публикацию в журнале 1. Доклады НАН РК, Вестник НАН РК, Известия НАН РК. Серия _____ 5000 тенге

Сайт НАН РК:<http://akademianauk.kz/>